

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 3: משוואות אוילר לגרנג'

1. שטח פנים מינימלי. נניח שיוצרים משטח על ידי סבוב של עקום המחובר שתי נקודות במישור xy סביב ציר y . מצאו את העקום עבורו שטח הפנים של המשטח מינימלי.

2. *The Brachistochrone problem* מסה m משוחררת ממנוחה מראשית הצירים. היא חפשית לנוח ללא חיכוך על מסילה הנתונה ע"י $y(x)$, $x = a(\phi - \sin \phi)$, $y = -a(1 - \cos \phi)$.

(א) קבלו את ה "לגראנג'יאן" $f(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$

(ב) רשמו את משוואת "אויילר לגראנג'" $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}$

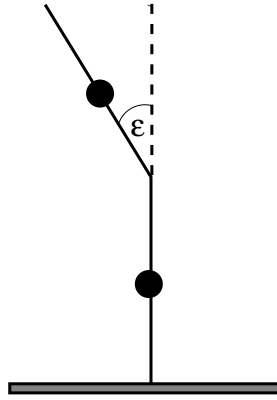
(ג) הראו כי המסלול נתון ע"י ציקלואידה $x = a(\phi - \sin \phi)$, $y = -a(1 - \cos \phi)$ כאשר a אמפליטודה.

3. שתי מסות m_1 ו m_2 עם קורדינטות x_1 ו x_2 בהתאמה, מתנגשות אלסטית.

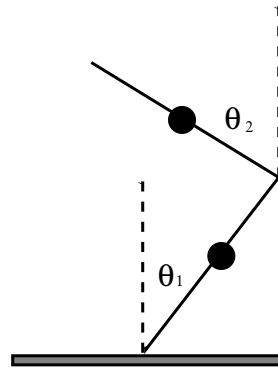
(א) רשמו את הלגראנג'יאן והראו כי התנע הקווי נשמר.

(ב) מצאו קורדינטות אחרות ולגראנג'יאן חדש, כך שהתנע הקווי הינו תנע צמוד לקורדינטה ציקלית.

4. שני מוטות חסרי מסה באורך r כל אחד מחוברים בקצותיהם. מסה m מקובעת באמצע כל אחד מן המוטות. המוט התחתון מוחזק אנכית, וקצהו מחובר לקרקע. המוט העליון מוסט בזווית ϵ ביחס למוט האנכי (איור a). מצאו את התאוצות הזוויתיות ברגע בו משחררים את המוטות ממנוחה. (הניחו כי $\epsilon \ll 1$, רשמו את מיקומי המסות כמתואר באיור b והשתמשו בקרוב זווית קטנות)



a



b