ב"ש אנליזה 2 תשפב מועד א

1. חשבו את:

(א) $\int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בשיטת ההצבה:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t=\ln(x) \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}+C = \frac{(\ln(x))^2}{2}+C$$

(ב) $\int x^2\sin(x)\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

נתחיל בחישוב עזר

$$\begin{aligned} \int x\cos(x)\mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{ccc} f=x & \Rightarrow & f'=1 \\ g'=\cos(x) & & g=\sin(x) \end{array} \right\} = \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\mathrm{d}x \\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C \end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned} \int x^2\sin(x)\mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{ccc} f=x^2 & \Rightarrow & f'=2x \\ g'=\sin(x) & & g=-\cos(x) \end{array} \right\} = \\ &= -x^2\cos(x)+2\int x\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= -x^2\cos(x)+2\left(x\sin(x)+\cos(x)\right)+C \end{aligned}$$

2. נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{\sqrt{x}}$

(א) מצאו:

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה f.

פתרון: צריך לדרוש רק כי $x\geq 0$ בגלל השורש.

ii. את תחומי העליה והירידה של פונקצית הנגזרת f'.

פתרון: נתחיל בגזירה

$$f'(x)=2e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

ונגדיר $g(t)=\frac{e^t}{t}$ עבור $t>0$. נשים לב שתחומי העליה והירידה של g ו f' זהיים. נחקור את g.

$$g'(t)=\frac{e^t t-e^t}{t^2}=\frac{e^t\left(t-1\right)}{t^2}$$

רואים ש g מתאפסת רק ב $t=1$. בנוסף, לכל $0<t<1$ נקבל ש $g'<0$ (כי $e^t>0, t^2>0, t-1<0$) ולכן בתחום $(0,1]$ מתקיים כי g יורדת. מנימוק דומה, לכל $t>1$ מתקיים ש $g'>0$ ולכן בתחום $[1,\infty)$ מתקיים כי g עולה.

(ב) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $y=2\cdot f'(x)$ והראו כי נקודה זו נמאת על גרף הפונקציה $y=f\left(x^2\right), x>0$.
פתרון: ל y ול f' מתקבל נקודת קיצון באותו נקודה. ראינו בסעיף קודם כי f' עולה ב $[1,\infty)$ ויורדת ב $(0,1]$ ולכן יש לה נקודת מינימום ב $x=1$. הערך המינמאלי הוא

$$2\cdot f'(1)=2\cdot\frac{e^{\sqrt{1}}}{\sqrt{1}}=2e$$

קיבלנו את הנקודה $(1,2e)$ ונראה שהיא על הגרף של $y=f\left(x^2\right), x>0$. מתקיים כי

$$f\left(x^2\right)=2e^{\sqrt{x^2}}=\{x>0\}=2e^x$$

ונציב $x=1$ ונקבל אכן ש $f\left(1^2\right)=2e^1$ כמו שרצינו.

(ג) הפונקציות $y=2f'(x)$, $y=f\left(x^2\right)$ נפגשות בנקודה אחת בלבד (הנק' מסעיף ב). השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות הללו ועל ידי הישר $x=a, a>1$, שווה ל $8e-2f(a)$. מצאו את הערך של a, תוכלו להשאיר ln בתשובותכם.
פתרון: כיוון שהפונקציות $y=2f'(x)$, $y=f\left(x^2\right)$ נפגשות בנקודה אחת בלבד, נציב x שגדול מ 1 על מנת לראות מי הפונקציה היותר גדולה בתחום $(1,\infty)$ (כי ראינו שנקודת המפגש היא ב $(1,2e)$). נציב $x=\ln^2(10)$:

$$f\left(\ln^2(10)\right)=2e^{\ln 10}=20$$

ואילו

$$2f'\left(\ln^2(10)\right)=2\cdot\frac{e^{\sqrt{\ln^2(10)}}}{\sqrt{\ln^2(10)}}=2\cdot\frac{10}{\ln(10)}=\frac{20}{\ln(10)}$$

ולכן $f\left(x^2\right)>2f'(x)$ בתחום $(1,\infty)$. לכן נוכל להסיק כי הנתון בשאלה מתפרש כ

$$\int_1^a\left[f\left(x^2\right)-2f'(x)\right]\mathrm{d}x=8e-2f(a)$$

או מפורשות

$$.\int_1^a\left[2e^x-2\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x=8e-4e^{\sqrt{a}}$$

נתחיל בחישוב האינטגרל

$$\begin{aligned}\int_1^a \left[2e^x - 2\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right] \mathrm{d}x &= 2\int_1^a \left[e^x - 2\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right] \mathrm{d}x \\ &= 2\left[e^x - 2e^{\sqrt{x}}\right]\Big|_1^a \\ &= 2\left(\left[e^a - 2e^{\sqrt{a}}\right] - \left[e^1 - 2e^{\sqrt{1}}\right]\right) \\ &= 2\left(\left[e^a - 2e^{\sqrt{a}}\right] + e\right)\end{aligned}$$

ואז מקבלים את המשוואה

$$2\left(\left[e^a - 2e^{\sqrt{a}}\right] + e\right) = 8e - 4e^{\sqrt{a}}$$

שנחלקה ב 2 לקבל

$$e^a - 2e^{\sqrt{a}} + e = 4e - 2e^{\sqrt{a}}$$

ואז נקבל $e^a = 3e$. נוציא ln לקבל $a = \ln(3e) = \ln(3) + 1$.

.3

(א) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס

$$\int_1^\infty \frac{\ln(e^x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x\ .$$

פתרון: נשווה לפונקציה $\frac{1}{2x} = \frac{x}{2x^2} = \frac{\ln(e^x)}{x^2+x^2}$ כי גם פונקציה זאת וגם הפונקציה

$$\frac{\ln(e^x+1)}{x^2+1}$$

חיוביות בתחום $[1,\infty)$. כיוון ש $\ln(e^x) < \ln(e^x+1)$ וגם $\frac{1}{x^2+x^2} < \frac{1}{x^2+1}$ (שהרי $x^2 \geq 1$ בתחום) נקבל כי

$$\int_1^\infty \frac{\ln(e^x)}{x^2+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{\ln(e^x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

אבל כמו שראינו האינטגרל השמאלי (הקטן יותר) הוא בעצם

$$\int_1^\infty \frac{\ln(e^x)}{x^2+x^2}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{2x}\mathrm{d}x$$

שידוע שמתבדר ולכן גם האינטגרל שבשאלה.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+4kn+5n^2}$.

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+4kn+5n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{4kn}{n^2}+5\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{k^2}{n^2}+\frac{4k}{n}+5}$$

עבור $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}$ מתקיים שהיא רציפה בקטע $[0,1]$. היא רציפה כי x^2+4x+5 פולינום מדרגה 2 ללא שורשים ולכן אי פריק. בנוסף $x^2+4x+5>0$ תמיד כי נוכל להציב את הערך $x=0$ לקבל 5 שהוא חיובי. לכן נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+4kn+5n^2}\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$$

נחשב את $\int\frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$ בעזרת השלמה לריבוע:

$$\int\frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+2)^2+1}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{1}\arctan\left(\frac{x+2}{1}\right)+C=\arctan(x+2)$$

ולכן

$$a_n\to\int_0^1\frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\left[\arctan(x+2)\right]\Big|_0^1=\arctan(3)-\arctan(2)$$

וזוהי התשובה הסופית.

.4

(א) חשבו את $f^{(46)}(0)$ עבור $f(x)=x^2e^{\left(-x^2\right)}$. פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב $-x^2$, נקבל

$$e^{\left(-x^2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

ואז

$$f(x)=x^2e^{\left(-x^2\right)}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!}.$$

לפי התיאוריה, ידוע שהמקדם של x^{46} הוא $\frac{f^{(46)}(0)}{46!}$. בטור שמצאנו המקדם של x^{46} הוא $\frac{1}{22!}=\frac{(-1)^{22}}{22!}$ (עבור $n=22$)

לכן

$$\frac{f^{(46)}(0)}{46!}=\frac{1}{22!}$$

ומכאן ש $f^{(46)}(0)=\frac{46!}{22!}$.

(ב) קרבו את $\int_0^1 x^2e^{\left(-x^2\right)}\mathrm{d}x$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{1000}$.

פתרון: לפי התיאוריה מתקיים כי

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^{\left(-x^2\right)}\mathrm{d}x &= \int_0^1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!}\right]\mathrm{d}x\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\int_0^1 x^{2n+2}\mathrm{d}x\right]\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big|_0^1\right]\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+3}\end{aligned}$$

זהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+3}\right|\le\left|\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{2k+3}\right|=\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2k+3}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\int_0^1 x^2e^{\left(-x^2\right)}\mathrm{d}x-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+3}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{1000}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2k+3}\le\frac{1}{1000}$. עבור $k=5$ נקבל $\frac{1}{5!\cdot 13}=\frac{1}{1560}<\frac{1}{1000}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{5-1}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{11}=\frac{15803}{83160}\approx 0.1900312$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{1000}$כמבוקש.

5. נביט בפונקציה

$$f(x)=\int_0^x\left(e-e^{\left(t^2\right)}\right)\mathrm{d}t$$

(א) מצאו באיזה נקודה f מקבלת את הערך המקס' שלה בקטע $[0,2]$.

פתרון: לפי המשפט היסודי של החדוא מתקיים כי

$$f'(x)=e-e^{\left(x^2\right)}$$

ולכן $f'(x) = 0$ הוא המשוואה

$$e^{\left(x^2\right)} = e$$

ששקולה למשוואה $x^2 = 1$ (אם נוציא ln). הפתרונות הן $x = \pm 1$ וכיוון שאנחנו מסתכלים בקטע $[0,2]$ נתמקד בפתרון $x = 1$. נגזור שוב לקבל

$$f''(x) = -2xe^{\left(x^2\right)}$$

ולכן

$$f''(1) = -2e < 0$$

ולכן $x = 1$ הוא הנקודה בה מתקבל ערך המקס' שהוא $f(1)$.

(ב) קרבו את הערך המקסימאלי של f בקטע $[0,2]$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.
פתרון: ידוע ש

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ולכן

$$e^{\left(x^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

ולכן (בהסתמך על תיאוריה שמאפשרת להחליף בין האינטגרל לסכימה)

$$f(1) = \int_0^1 \left(e - e^{\left(t^2\right)}\right) \mathrm{d}t = e - \int_0^1 e^{\left(t^2\right)} \mathrm{d}t = e - \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= e - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{t^{2n}}{n!} \mathrm{d}t\right) = e - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\bigg|_0^1\right) = e - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(2n+1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

אם נפתח את הטור עד סדר k, כלומר

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

השגיאה תהיה

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2n}{2n+1}\right) < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \le \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} \cdot 2 = \frac{1}{2^{k-1}}$$

לכן עבור $k=8$ נקבל שהשגיאה חסומה על ידי $\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}$ וקטנה מ h המבוקש. לכן קירוב שעונה על תנאי השאלה יהיה

$$\sum_{n=0}^{8}\frac{1}{n!}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)=0+\frac{1}{1!}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{6}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{8!}\left(\frac{16}{17}\right)=\frac{19230307}{15315300}\approx 1.255627$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.