6. פרמטר קונפורמי, יחס של Clairawt, משטחים

6.1 פרמטר קונפורמי τ

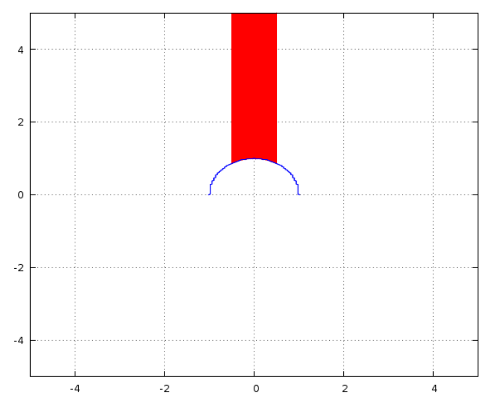
משפט

כל שריג ב$\mathbb{C}$ הוא דומה לשריג הנפרש ע"י $\{\tau, 1\}$ כאשר τ שייך לתחום יסודי סטנדרטי - $\tau \in D$.

הערך $\tau = e^{i\pi/3}$ מתאים לשריג של Eisenstein.

התחום היסודי הסטנדרטי מוגדר ע"י

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \begin{array}{c} \mathrm{Im}\left(z\right) > 0 \\ \left|\mathrm{Re}\left(z\right)\right| \leq \dfrac{1}{2} \\ \left|z\right| \geq 1 \end{array} \right\}$$



דוגמה

$$L_{\alpha,\beta} \qquad \alpha, \beta > 0$$

$$L_{\alpha,\beta} = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\left(\alpha e_1, \beta e_2\right)$$

אם $\beta > \alpha$ אזי $\tau = i$

שריג $L_{\alpha,\beta}$ דומה לשריג $L_{1,\beta/\alpha}$. אם $\alpha > \beta$ אזי $\tau = \frac{\beta}{\alpha} i \in D$

בעיה - למצוא τ אם $\alpha < \beta$

נכפיל בסקלר ממשי:

$$L_{\alpha,\beta} \subseteq \mathbb{C} \qquad \alpha < \beta$$

$$L_{\alpha,\beta} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\left(i\beta, \alpha\right)$$

$$L_{\alpha,\beta} \sim L_{1,\beta/\alpha} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\left(\frac{\beta}{\alpha} i, 1\right)$$

לכן $\tau = \frac{\beta}{\alpha} i$

מקרה $\alpha < \beta$

$$L_{\alpha,\beta} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\left(\beta i, \alpha\right) \sim \text{span}_{\mathbb{Z}}\left(\frac{\beta}{\alpha} i, 1\right)$$

$\frac{\beta}{\alpha} i$ לא מקיימת $|z| \geq 1$. נכפיל ב$(-i)$:

$$L_{\alpha,\beta} \sim \text{span}\left(-\alpha i, \beta\right) \sim \text{span}_{\mathbb{Z}}\left(\alpha i, \beta\right) \sim \text{span}_{\mathbb{Z}}\left(\frac{\alpha}{\beta} i, 1\right) \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\alpha}{\beta} i}$$

6.2 קואורדינטות ספיריות

הגדרה

קואורדינטות ספיריות (ρ, θ, φ) הן

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z = \rho \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

תזכורת: ב$\mathbb{R}^2$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

לכן $\boxed{0 \le \theta \le 2\pi}$, כלומר $\theta \in [0, 2\pi]$

כדור

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

בקואורדינטות ספיריות ניתן להגדיר את זה בתור

$$S^2 = \{\rho = 1\}$$

הגדרה

קו רוחב הוא אוסף של נקודות $\{\varphi = \text{const}\}$.

אם $\text{const} = \frac{\pi}{2}$ אזי קו הרוחב הוא קו המשווה.

6.3 יחס Clairawt

משפט

תהי $\beta(t)$ פרמטריזציה רגולרית של מעגל ראשי על S^2.
נסמן ב$r(t)$ מרחק בין $\beta(t)$ לבין ציר־z. תהי $\gamma(t)$ זוית בין מעגל ראשי בנקודה $\beta(t)$ לבין קו רוחב. אזי מתקיים

$$r(t)\cos\gamma(t) = \text{const}$$

בפיזיקה היחס הזה נקרא Conservation of angular momentum.

6.4 גיאומטריה של משטחים

אפשר לקפל מישור בלי לשנות את הגיאומטריה הפנימית שלו ־ כלומר לקפל דף נייר בלי למתוח, לכווץ או לקרוע אותו. אפשר לקבל ככה גליל או חרוט, אבל לא כדור. נשאלת השאלה ־ למה?

6.5 משטח רגולרי, Jacobian

יהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוח. נרצה להפוך אותו למשטח(לאו דווקא שטוח) במרחב:

$$\underline{x} : U \to \mathbb{R}^3$$

$$M = \text{Image}\,(x)$$

$$\underline{x} = \underline{x}\left(u^1, u^2\right)$$

$p = \underline{x}\left(u_0^1, u_0^2\right)$ נקודה על M

הגדרה

Jacobi של $\underline{x}$ ע"י

$$J_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \dfrac{\partial x}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x}{\partial u^2} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

כלומר, אם

$$\underline{x}\left(u^1, u^2\right) = \left(x\left(u^1, u^2\right), y\left(u^1, u^2\right), z\left(u^1, u^2\right)\right)$$

אזי

$$J_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u^1} & \dfrac{\partial y}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u^1} & \dfrac{\partial z}{\partial u^2} \end{bmatrix}$$

הגדרה

פרמטריזציה $\underline{x}\left(u^1, u^2\right)$ של משטח M נקראת רגולרית אם מתקיימים התנאים השקולים הבאים:

1. $\text{rank}\left(J_{\underline{x}}\right) = 2$
2. וקטורים $\left\{\dfrac{\partial x}{\partial u^1}, \dfrac{\partial x}{\partial u^2}\right\}$ בלתי תלויים לינארית.

דוגמה

ספירה ברדיוס $\beta > 0$

$$S_\beta^2 = \{\rho = \beta\}$$

$$S_\beta^2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = \beta^2\right\}$$

$$f(x,y) = \sqrt{\beta^2 - x^2 - y^2}$$

נגדיר משטח $\underline{x}\left(u^1, u^2\right)$ שהוא גרף של f:

$$\underline{x}\left(u^1, u^2\right) = \left(u^1, u^2, f\left(u^1, u^2\right)\right) = \left(u^1, u^2, \sqrt{\beta^2 - \left(u^1\right)^2 - \left(u^2\right)^2}\right)$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u^1} = (1, 0, f_x)^t \qquad \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^2} = (0, 1, f_y)^t$$

$$J_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank}\left(J_{\underline{x}}\right) = 2$, לכן הפרמטריזציה היא רגולרית.

הערה

כיסינו ככה חצי כדור. אם רוצים לכסות את כל הכדור בפרמטריזציות רגולריות, צריך יותר פרמטריזציות.

6.6 תבנית יסודית ראשונה של משטח

$M \subseteq \mathbb{R}^3$.

מכפלה סקלרית ב$\mathbb{R}^3$ $\langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ - כלומר

$$v = \left(v^1, v^2, v^3\right) \qquad w = \left(w^1, w^2, w^3\right)$$

$$\langle v, w\rangle = \sum_{j=1}^{3} v^j w^j$$

עבור פרמטריזציה $\underline{x}$ למשטח:

$$\underline{x}_1 = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^1} \qquad \underline{x}_2 = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^2}$$

$$\underline{x}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^i}$$

הגדרה

מקדמים $g_{ij} = g_{ij}\left(u^1, u^2\right)$ של מטריקה הם

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^j} \right\rangle \qquad \begin{array}{l} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{array}$$

$$g_{ij} = \left\langle \underline{x}_i, \underline{x}_j \right\rangle$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

הערה: מתקיימת סימטריות: $g_{ij} = g_{ji}$. במילים אחרות: $\boxed{g_{[ij]} = 0}$

אם $\underline{x}\left(u^1, u^2\right) = \left(u^1, u^2, f\left(u^1, u^2\right)\right)$, אז $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$

$$g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$$

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle = 1 + f_x^2$$

$$g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle = 1 + f_y^2$$

$$g_{21} = g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle = 0 + 0 + f_x f_y = f_x f_y$$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{bmatrix}$$

דוגמה

ספירה יחידה S^2

$$u^1 = \theta \qquad u^2 = \varphi$$

$$\underline{x}(\theta, \varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \qquad \varphi \in [0, \pi]$$

$$\underline{x}_1 = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} = (-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0)$$

$$\underline{x}_2 = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$$

$$|\underline{x}(\theta,\varphi)|^2 = (\sin\varphi\cos\theta)^2 + (\sin\varphi\sin\theta)^2 + \cos^2\varphi =$$

$$= \sin^2(\varphi)\left(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}\right) + \cos^2\varphi = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$\|\underline{x}_1\|^2 = (-\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\sin\varphi\cos\theta)^2 = \sin^2\varphi\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$\|\underline{x}_1\| = 1$$

$$g_{11} = \|\underline{x}_1\|^2 = \sin^2\varphi$$

$$g_{22} = \|\underline{x}_2\|^2 = \cos^2\varphi\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + \sin^2\varphi = 1$$

$$g_{12} = \langle \underline{x}_1, \underline{x}_2 \rangle = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= -\cancel{\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta} + \cancel{\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\sin\theta} = 0$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט

מטריצה (g_{ij}) היא מטריצה Gram של $J_{\underline{x}}$:

$$\boxed{g_{ij} = J_{\underline{x}}^t J_{\underline{x}}}$$

$$g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle \qquad g_{ij} = x_i^t x_j$$

הגדרה

מישור המשיק של משטח הוא מישור נפרש ע"י ווקטורים $\underline{x}_1, \underline{x}_2$:

$$T_P M$$

הגדרה

תבנית יסודית ראשונה I_P של M היא תבנית בילינארית על מישור המשיק של M:

$$I_P : T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}$$

$$\forall_{v,w\in T_P M} I_P\left(v,w\right) = \left\langle v,w\right\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

המטריצה המבטאה I_P ביחס לבסיס $\left(\underline{x}_1,\underline{x}_2\right)$ ל$T_P M$ היא

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_P M = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left(x_1,x_2\right)}$$

6.7 מישור, גליל

דוגמה

מישור:

$$\underline{x}\left(u^1,u^2\right) = \left(u^1,u^2,0\right)$$

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

במילים אחרות:

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

זוהי מטריצת היחידה - $g_{ij} = I_2$

דוגמה - גליל

$$\underline{x}\left(u^1,u^2\right) = \left(\cos u^1, \sin u^1, u^2\right)$$

$$\underline{x}_1 = \left(-\sin u^1, \cos u^1, 0\right)^t$$

$$\underline{x}_2 = (0,0,1)^t$$

$$g_{11} = |x_1|^2 = 1$$

$$g_{22} = |x_2|^2 = 1$$

$$g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\underline{x}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\cos u^1, \sin u^1, u^2\right) = \left(0, 0, \frac{\partial u^2}{\partial u^2}\right) = (0,0,1)$$

6.8 משטחי סיבוב

פרמטריזציה של עקומה C ע"י $(f(\varphi), g(\varphi))$ כאשר $f(\varphi) > 0$

$$\underline{x}(\theta, \varphi) = (f(\varphi)\cos\theta, f(\varphi)\sin\theta, g(\varphi))$$

$$u^1 = \theta \qquad u^2 = \varphi$$

$$\begin{cases} \underline{x}_1 = (-f(\varphi)\sin\theta, f(\varphi)\cos\theta, 0) \\ \underline{x}_2 = \left(\frac{df}{d\varphi}\cos\theta, \frac{df}{d\varphi}\sin\theta, \frac{dg}{d\varphi}\right) \end{cases}$$

$$g_{11} = \langle \underline{x}_1, \underline{x}_1 \rangle = f^2(\varphi)$$

$$g_{22} = \langle \underline{x}_2, \underline{x}_2 \rangle = \left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2$$

$$g_{12} = \langle \underline{x}_1, \underline{x}_2 \rangle = \cdots = 0$$

אם φ פרמטר במהירות יחידה אזי

$$\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2 = 1$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה

אם

$$f(\varphi) = \sin\varphi$$

$$g(\varphi) = \cos\varphi$$

מקבלים ספירה יחידה