תזכורת: יהיו G_1, G_2 שתי חבורות. ניתן להגדיר את חבורת המכפלה $G = G_1 \times G_2$.
שאלה הפוכה: תהי G חבורה. איך אפשר לדעת אם היא איזומורפית למכפלה $G_1 \times G_2$?
איזה תכונות יש ל$G = G_1 \times G_2$?
יש לG שתי תתי חבורות A, B כך ש:

$$A \cong G_1, B \cong G_2$$

שהן:

$$A = G_1 \times \{e\}$$

$$B = \{e\} \times G_2$$

A וB הן תתי חבורות נורמליות. כי הן מכפלות של תתי חבורות נורמליות.
A וB נחתכות טריוויאלי.
$G = AB$, כלומר כל איבר בG הוא מכפלה של איבר מA עם איבר מB.
איברי A מתחלפים עם איברי B.

$$(g_1, e)(e, g_2) = (e, g_2)(g_1, e)$$

טענה. בהינתן חבורה G, אם רוצים להוכיח ש$G \cong G_1 \times G_2$ צריך למצוא בG שתי תתי חבורות A, B שיקיימו:

1. $A \cong G_1, B \cong G_2$
2. שתיהן נורמליות
3. $G = AB$
4. כל איבר מA מתחלף עם כל איבר מB.
5. $A \cap B = \{e\}$

הוכחה. המטרה היא לבנות איזומורפיזם

$$f : G \to G_1 \times G_2$$

נתון ש$G = AB$. כלומר לכל $g \in G$ יש $a \in A, b \in B$ כך ש$g = ab$.
צריך להוכיח שזה יחיד.
נניח ש$ab = a'b'$ כאשר $a, a' \in A$ ו$b, b' \in B$.

$$a'^{-1}/ab = a'b'/b^{-1}$$

$$a'^{-1}a = b'b^{-1}$$

בצד ימין יש איבר מB, בצד שמאל יש איבר מA, והם שווים, כלומר זה איבר בחיתוך. לכן $a'^{-1}a = e$ ו$b'b^{-1} = e$. אז נקבל ש$a = a'$ ו$b = b'$.
חח"ע- אם $f(g_1) = f(g_2)$ אז

$$f(g_1) = (a,b) = f(g_2)$$

כלומר

$$g_1 = ab = g_2$$

על: לכל $a \in A, b \in B$ נקח את $ab \in G$.
הומומורפיזם: צריך להראות
נסמן $g = ab, g' = a'b'$

$$f(gg') = f(g)f(g')$$

$$f(g)f(g') = (a,b)(a',b') = (aa',bb')$$

אז צריך להראות ש$gg' = aa'bb'$

$$gg' = (ab)(a'b') = aa'bb'$$

לכאורה לא השתמשנו בנורמליות.
למעשה, אפשר לוותר על דרישת ההתחלפות, ואז להשתמש בנורמליות.
כל שתי תתי חבורות נורמליות על חיתוך טריוויאלי האיברים מתחלפים.
יהיו A, B נורמליות עם חיתוך טריוויאלי. יהיו $a \in A, b \in B$.
בשביל להראות שהם מתחלפים צריך להוכיח ש

$$aba^{-1}b^{-1} = e$$

$$(aba^{-1})b^{-1} \in B$$

$$a(ba^{-1}b^{-1}) \in A$$

לכן $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B$ $\square$

תרגיל. הוכיחו שD_{2n} עבור n אי זוגי, איזומורפית ל$D_n \times \mathbb{Z}_2$.

פתרון. $A = \langle \sigma \rangle, B = \langle \tau \rangle$. לא יעבוד. כי אף אחת מהן לא איזומורפית לD_n, כי שתיהן ציקליות.
$A = \langle \sigma^2, \tau \rangle, B = \langle \sigma^n \rangle$
$A \cong D_n, B \cong \mathbb{Z}_2$. (זה בגלל ש$D_n$ נוצר ע"י שני איברים τ, σ' שמקיימים $\tau^2 = \sigma'^n = e, \tau\sigma' = \sigma'^{-1}\tau$.
וσ^2 וτ מקיימים את היחסים האלה.)

$A \trianglelefteq D_{2n}$ כי היא מאינדקס 2.
$B \trianglelefteq D_{2n}$. כי $B = Z(D_{2n})$.
$A \cap B = \{e\}$ כי אי אפשר להגיע לσ^n ע"י σ^2וτ כי n אי זוגי.
צריך להוכיח ש$D_{2n} = AB$. מספיק להוכיח ש$\sigma, \tau \in AB$.
$\tau \in A$.
$\sigma = (\sigma^2)^{\frac{n+1}{2}} \sigma^n = \sigma^{n+1}\sigma^n = \sigma^{2n+1} = \sigma$.

הערה. אם $|G| = |G_1||G_2|$ גדלים סופיים, אז כל פונקציה חח"ע $G \to G_1 \times G_2$ היא אוטומטית על. ולכן במקרה כזה לא צריך לבדוק ש$G = AB$. (זה יקרה בחינם).

חבורות פתירות

הגדרה. תהי G חבורה. סדרה "תת נורמלית" היא סדרה של תתי חבורות, שכל אחת מוכלת ממש בקודמת, $G \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq \{e\}$
כך שכל תת חבורה נורמלית בתת חבורה הקודמת, אבל לא בהכרח בG. $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$.

למשל, לכל חבורה G, $G \trianglerighteq \{e\}$.
$S_n \trianglerighteq A_n \trianglerighteq \{e\}$
$D_4 \trianglerighteq \langle \sigma \rangle \trianglerighteq \langle \sigma^2 \rangle \trianglerighteq \{e\}$.

הגדרה. עידון של סדרה תת נורמלית, היא סדרה תת נורמלית שמכילה ממש את הסדרה הקודמת. כלומר, שדוחפים באמצע עוד תת חבורה.
למשל, $D_4 \trianglerighteq \langle \sigma \rangle \trianglerighteq \langle \sigma^2 \rangle \trianglerighteq \{e\}$ עידון של $D_4 \trianglerighteq \langle \sigma \rangle \trianglerighteq \{e\}$.

הגדרה. סדרה תת נורמלית נקראת "סדרת הרכב" אם אי אפשר לעדן אותה, כלומר, היא סדרה תת נורמלית מקסימלית. זה שקול לכך שכל המנות בסדרה התת נורמלית הן חבורות פשוטות.

דוגמה. $D_4 \trianglerighteq \langle \sigma \rangle \trianglerighteq \langle \sigma^2 \rangle \trianglerighteq \{e\}$

$$D_4 / \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\langle \sigma \rangle / \langle \sigma^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\langle \sigma^2 \rangle / \{e\} \cong \mathbb{Z}_2$$

ו$\mathbb{Z}_2$ היא חבורה פשוטה.

הגדרה. למנות בין שני איברים עוקבים בסדרה קוראים "הגורמים" של הסדרה.

משפט. לחבורה G יכולות להיות כמה סדרות הרכב. אבל בכל סדרות ההרכב יהיו את אותם גורמים, אותו מספר פעמים, ייתכן שבסדר שונה.

דוגמה.

$$\mathbb{Z}_{12} \trianglerighteq 2\mathbb{Z}_{12} \trianglerighteq 4\mathbb{Z}_{12} \trianglerighteq \{0\}$$

הגורמים : $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$

$$\{0\} \trianglelefteq 6\mathbb{Z}_{12} \trianglelefteq 3\mathbb{Z}_{12} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{12}$$

הגורמים הם $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2$.

$$\{0\} \trianglelefteq 6\mathbb{Z}_{12} \trianglelefteq 2\mathbb{Z}_{12} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{12}$$

הגורמים הם $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3$.

הגדרה. חבורה נקראת "פתירה" אם יש לה סדרה תת נורמלית שכל הגורמים בה אבליים. שקול לכך שבכל סדרות ההרכב הגורמים הם מהצורה $\mathbb{Z}_p$ עבור p ראשוני. (כי אלה החבורות הפשוטות האבליות היחידות).

שימו לב, זה שמצאתם סדרה תת נורמלית עם גורמים לא אבליים, עדיין לא אומר שהחבורה לא פתירה כי אולי יש סדרה אחרת. הדרך היחידה להוכיח שחבורה לא פתירה היא למצוא סדרת הרכב שבה הגורמים לא אבליים (כי בכל סדרות ההרכב יש את אותם גורמים).

דוגמה. כל חברה אבלית היא פתירה ע"י $\{e\} \trianglelefteq G$.

S_n לכל $n \geq 5$ אינה פתירה, כי $\{e\} \trianglelefteq A_n \trianglelefteq S_n$ היא סדרת הרכב, כי המנות הן $\mathbb{Z}_2$ וA_n שהן פשוטות. אבל A_n לא אבלית.

$\{e\} \trianglelefteq V_4 = \{(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4), (2,3), e\} \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$. המנות הן $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ וחבורה מסדר 4. כל חבורה מסדר p^2 היא אבלית.

תרגיל. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$. הוכיחו שהיא פתירה.

פתרון. נסתכל על התת חבורה

$$Z(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

$\{e\} \trianglelefteq Z(H) \trianglelefteq H$. $Z(H)/\{e\} \cong Z(H)$ זאת חבורה מסדר p ולכן אבלית.
$H/Z(H)$ היא חבורה מסדר p^2, וידוע שכל חבורה מסדר p^2 היא אבלית.

משפט. בהרצאה תוכיחו שכל חבורת-p היא פתירה.

תרגיל. תהי $|G| = pq$ מכפלה של שני ראשוניים שונים. הוכיחו שG פתירה.

פתרון. בה"כ $p > q$. אז חבורת p סילו תהיה יחידה, כי

$$n_p | q$$

$$n_p \equiv 1 \mod p$$

לכן $n_p = 1$.
אז חבורת p סילו, P היא יחידה ולכן נורמלית. נסתכל על

$$\{e\} \trianglelefteq P \trianglelefteq G$$

G/P היא חבורה מגודל q ראשוני, לכן ציקלית ולכן אבלית.
$P \cong P/\{e\}$ היא חבורה מגדול p ראשוני לכן ציקלית ולכן אבלית.