אינפי 3 תרגול 6

23 בנובמבר 2013

כלל השרשרת המשך; נגזרת מסדר גבוה־המשך ונגזרות מכוונות

שרשרת ־ דוגמאות נוספות

1. תהי $f(x,y) \in C\prime(\mathbb{R}^2)$. נתון:

$$f(0,1)=1;\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=2;\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=2$$

ונגדיר $z(x)=f(x,f(x^2,1-x))=f(u,v)$ לחשב $z\prime(0)=\frac{dz}{dx}(0)$

תשובה: נסמן $u=x;v=f(x^2,1-x)$. הנקודה $x=0$ עוברת לנקודה: $u=0;v=f(0^2,1-0)=f(0,1)=1$ במישור $u-v$. נשתמש בכלל שרשרת כדי לגזור את $z(x)$:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

בנקודה $x=0 \longrightarrow u=0,v=1$ נקבל:

$$\frac{dz}{dx}(0)=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(0,1)}_{\text{2,der. f by first var}}\cdot\frac{du}{dx}(0)+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(0,1)}_{\text{der. by second var}}\cdot\frac{dv}{dx}(0)$$

כדי לחשב את (2) נשתמש שוב בשרשרת:

$$v=f(\underbrace{x^2}_{s},\underbrace{1-x}_{t})$$

עבור $x=0$ גם $s=0,t=1$ ($x \longrightarrow (0,1)$ במישור $s-t$) ואז

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dx}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx}$$

בנק' הנ"ל:

$$\frac{dv}{dx}(0)=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial s}(0,1)}_{2}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dx}(0)}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(0,1)}_{2}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}(0)}_{-1}=-2$$

2. פונקציה $u(x,y)$ נקראת <u>הרמונית</u> בכל המישור אם יש לה נגזרות חלקיות מסדר ראשון ושני רציפות בכל המישור ולכל $x,y\in\mathbb{R}^2$ מתקיימת המשוואה החלקית (משוואת לפלס):

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u''_{xx}+u''_{yy} &= 0\end{aligned}$$

דוגמאות לפונקציות הרמוניות: $\sin(x+y),x^2+y^2$. הוכח: אם $u(x,y)$ הרמונית ולא קבועה ב־$\mathbb{R}^2$ ו־$f(u)$ גזירה פעמיים ולא קבועה ופונקציה מורכבת $z=f(u(x,y))$ גם הרמונית אז $f(u)$ <u>פונקציה ליניארית,</u>כלומר $A,B\in\mathbb{R}\quad f(u)=Au+B,$.

תשובה: נתון ש־u הרמונית ולא קבועה, ז"א $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$ וכן $(u_x,u_y)\not\equiv(0,0)$ ו־ $u''_{xx}+u''_{yy}=0$ לכל x,y. בנוסף נתון f גזירה פעמיים ולא קבועה, ז"א $f\prime(u)\not\equiv 0$ ו־z הרמונית כלומר $z''_{xx}+z''_{yy}=0$ לכל x,y. צריך להוכיח ש־f לינארית. נשתמש בכלל שרשרת:

$$\begin{aligned}z\prime_x &= \frac{dz}{dx}(x,y)=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\\ z\prime\prime_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overset{\text{product derivative}}{=}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overset{(\star)}{=}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{d^2 f}{du^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\\ &\overset{(\star)}{=} f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+f'(u)\cdot u''_{xx}\\ z\prime_y &= \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\\ z''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\overset{\text{product}}{=}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{du}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ &= f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+f\prime(u)\cdot u''_{yy}\end{aligned}$$

נתון כי z הרמונית, כלומר $z''_{xx}+z''_{yy}=0$ אז נחבר את הביטויים שקיבלנו ונשווה ל־0:

$$0=f\prime\prime(u)\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+f\prime(u)\cdot\underbrace{(u''_{xx}+u''_{yy})}_{\text{u harmonic}\Rightarrow=0}$$

החלק בסוגרים לא תמיד קבוע (שאחרת u קבועה) ולכן $f''(u) = 0 \Rightarrow f(u) =$ $Au + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ ומ.ש.ל.

נגזרת מכוונת (לפי וקטור כיוון) של פו' סקלרית ב־2,3 משתנים

תהי $f(x,y,z)$ ב־$\mathbb{R}^3$ מוגדרת בסביבת נקודה $A(x_0,y_0,z_0)$. נעביר דרך A קרן (חצי ישר), בכיוון של וקטור יחידה $\vec{n}$, $\vec{n} = (\alpha,\beta,\gamma)$, $\|\vec{n}\| = 1$. ניקח נקודה B כלשהי על קרן זאת (ז"א $B(x_0+\alpha h, y_0+\beta h, z_0+\gamma h)$ היכן ש־$h > 0$). נגדיר הנגזרת של f בכיוון של $\vec{n}$ בנקודה A כך: $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(A) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+\alpha h y_0+\beta h z_0+\gamma h) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}$. הנגזרות המכוונות בכיווני הצירים הן בהתאמה $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$. אם קיימות כל הנגזרות המכוונות בכל הסוגים, זה לא מבטיח דיפרנציאביליות!

משפט: (קשר בין נגזרת מכוונת לגרדיאנט) תהא $f(x,y,z)$ דיפרנצאבילית בנקודה $A(x_0,y_0,z_0)$

אז $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}(A) = \vec{\nabla} f(A) \cdot \vec{n}}$.

דוגמה 1: תהי $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ דיפר' ב־$\mathbb{R}^3$ ומקיימת את המשוואה $f(x,y,x^2+y^2) = 2x + y \quad (\star)$ לכל x,y (ז"א f על הפרבלואיד $z = x^2+y^2$ שווה ל־$2x+y$). ידוע שהנגזרת המכוונת של f בנקודה $(0,2,4)$ בכיוון הוקטור היא $\vec{p} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (-2,1,2)$ שווה ל־$-5/3$. לחשב את $\vec{\nabla} f(0,2,4)$.

פתרון: נתון כי f דיפר' ולכן אפשר להשתמש במשפט. <u>נתון:</u> $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,2,4) = -5/3$ כאשר $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ וקטור יחידה בכיוון $\vec{p}$. לפי משפט

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0,2,4) &= \vec{\nabla} f(0,2,4) \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{-5}{3} \\
-\frac{2}{3} f'_x(A) + \frac{1}{3} f'_y(A) + \frac{2}{3} f'_z(A) &= \frac{-5}{3} \\
\Rightarrow 2f'_x(A) - f'_y(A) - 2f'_z(A) &= 5 \quad (1)
\end{aligned}$$

כדי לצור עוד 2 משוואות נשתמש במשוואה כוכבית אחרונה. נשים לב שהנקודה $(0,2,4)$ נמצאת על המשטח $z = x^2+y^2$ (בדקו!). נגזור את המשוואה לפי x משני הצדדים ואחר מכן לפי y משני הצדדים (שרשרת):

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}_{0} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{dz}{dx}}_{2x} = 2$$

נציב נקודה A:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot 1 + 0 + \frac{\partial f}{\partial z}(A) \cdot 2x \,|_A = 2 \\
&\Rightarrow \quad \boxed{(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 2}
\end{aligned}$$

נגזור לפי y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

נציב את A להסיק:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial z}(A)\cdot 2y\mid_A=1$$

ואזי:

$$(3)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(A)+4\frac{\partial f}{\partial z}(A)=1$$

קיבלנו 3 משוואות ב־3 נעלמים. אם נפתור נקבל:

$$\begin{aligned} f'_x(A) &= 2; f'_y(A)=-3; \\ f'_z(A) &= 1 \\ \Rightarrow \nabla\vec{f}(a) &= (2,-3,1) \end{aligned}$$