מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

משתנים מקריים מעריכיים – שאלות נוספות

שאלה 1

במערכת שני רכיבים ב"ת Y,X. אורך חיי הרכיבים בשנים מתפלג $X \sim Exp(0.1), Y \sim Exp(0.4)$.

המערכת פולטת חלקיקים בקצב ממוצע של חלקיק ב-3 שניות לפי התפלגות מעריכית.

א. כשהרכיבים מסודרים טורית, מה ההסתברות שתפעל יותר מ- 33 חודשים? מה תוחלת חיי המערכת? (המערכת תושבת כאשר הרכיב הראשון יושבת).
ב. כשהרכיבים מסודרים מקבילית, מה ההסתברות שתפעל יותר מ- 33 חודשים? מה תוחלת חיי המערכת? (המערכת תושבת כאשר הרכיב האחרון יושבת).
ג. מה ההסתברות שהחלקיק השני שנפלט מתחילת הפעלת המערכת, ייפלט בפרק הזמן שבין השנייה השלישית לחמישית?

פתרון:

ראשית נתרגם את הזמן ליחידות של שנים: 33 חודשים = 2.75 שנים <= $t = 2.75$.

<u>א)</u>. למעשה אנו מתבקשים לחשב $P(T > t)$ כאשר

$$T \sim Exp\left(\min\left(X_1, X_2\right)\right) = Exp\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) = Exp\left(0.1 + 0.4\right) = Exp\left(0.5\right)$$

ההסתברות המבוקשת:

$$P\left(T > t\right) = 1 - F_T(t) = 1 - \left(1 - e^{-0.5 \cdot 2.75}\right) = e^{-0.5 \cdot 2.75} = 0.253$$

התוחלת: $T \sim Exp\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \Rightarrow E\left(T\right) = \dfrac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \dfrac{1}{0.1 + 0.4} = 2$

<u>דרך ב</u>: אפשר לחשב ישירות –

הסיכוי שרכיב יפעל (בהצלחה) בתנאים שיועדו לו = שלא יהיה בו כשל.

$$P\left(X > x\right) = 1 - F_X(x) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0$$

פונקציית הצפיפות של המערכת: $P\left(T > t\right) = e^{-0.1t} \cdot e^{-0.4t} \quad , t \geq 0$

לכן ההסתברות המבוקשת: $P\left(T > t\right) = 1 - F_T(t) = e^{-0.1 \cdot 2.75} \cdot e^{-0.4 \cdot 2.75} = 0.253$

<u>ב)</u>. נחשב לפי ההסתברות המשלימה להסתברות שכל הרכיבים פועלים.

ההסתברות של תקינות המערכת:

$$P\left(T > t\right) = 1 - P\left(T \leq t\right) = 1 - \left[P\left(X_1 \leq t \cap X_2 \leq t\right)\right] = 1 - \left[P\left(X_1 \leq t\right) \cdot P\left(X_2 \leq t\right)\right]$$

לכן ההסתברות המבוקשת:

$$P(T>t)=1-\left[\left(1-e^{-0.1t}\right)\cdot\left(1-e^{-0.4t}\right)\right]=1-\left[\left(1-e^{-0.1\cdot 2.75}\right)\cdot\left(1-e^{-0.4\cdot 2.75}\right)\right]=0.84$$

<u>הערה</u>: אפשר לפתור גם ע"י $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

התוחלת: מסעיף קודם -

$$P(T\le t)=\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)\cdot\left(1-e^{-\lambda_2 t}\right)=1-e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}+e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}=F_T(t)$$

הצפיפות, $f_T(t)=\frac{d\left(F_T(t)\right)}{dt}=\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}+\left(\lambda_1+\lambda_2\right)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$

נסמן: $W\sim Exp\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$

חישוב התוחלת,

$$E(T)=\int_0^\infty t\left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right)dt$$
$$=E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)-E(W)=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{1}{0.1}+\frac{1}{0.4}-\frac{1}{0.5}=10.5$$

<u>ג).</u> התפלגות זמן חלקיק שני שנפלט היא גמה

$$X_1\sim Exp(\lambda),\ X_2\sim Exp(\lambda)\Rightarrow X_1+X_2\sim Gamma(2,\lambda)$$

מהנתון $E(X)=3 \qquad \Rightarrow X\sim Exp(\lambda=1/3)$

הצפיפות $f_X(t)=\frac{t}{9}e^{-\frac{t}{3}}$

ההסתברות המבוקשת:

$$P(3\le x\le 5)=\int_3^5 f_X(x)dx=\int_3^5\frac{t}{9}e^{-\frac{t}{3}}dt=-\frac{t}{3}e^{-\frac{t}{3}}-e^{-\frac{t}{3}}\Big|_3^5$$
$$=\left(-\frac{5}{3}e^{-\frac{5}{3}}-e^{-\frac{5}{3}}\right)-\left(-\frac{3}{3}e^{-\frac{3}{3}}-e^{-\frac{3}{3}}\right)=2e^{-1}-\frac{8}{3}e^{-\frac{5}{3}}=0.232$$

<u>שאלה 2</u>

המחיר ששוכר מוכן לשלם עבור שכ"ד הינו משתנה מעריכי שתוחלתו θ. משכיר מתאים את שכר הדירה, לפי תוחלת המחיר הגבוהה ביותר מבין המחירים שמוכנים לשלם כל השוכרים הפונים אליו. מה המחיר הממוצע שמוכן שוכר לשלם אם פנו אל המשכיר 6 שוכרים ב"ת ושכר הדירה שהוא גובה עומד על 4900 ש"ח?

פתרון:

נעזר בנוסחה: $E\left(\max\left(X_1,\ldots,X_n\right)\right)=\mu\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$

שנכונה עבור מ"מ מעריכיים ב"ת עם תוחלת שווה μ (ש"ה).

נסמן ב- X_i את המחיר שמוכן לשלם השוכר ה-i כאשר $1\le i\le 6$. כעת,

$$4900=E(\max\{X_i:1\le i\le 6\})=(\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i})\theta=2.45\theta,$$

ולכן $\theta=2000$.