פתרון לתרגיל בית 3 במד"ר סמסטר קיץ תשע"ב

1. א. נחפש את הפתרון של המשוואה בצורה:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

נציב אותו למשוואה ונקבל:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^n+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^n+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_{n+2}(n+2)(n+1)-a_n n(n-1)-2a_n n+\alpha(\alpha+1)a_n\right)x^n+$$
$$+2a_2+2\cdot 3a_3x-2a_1x+\alpha(\alpha+1)a_0+\alpha(\alpha+1)a_1x=0$$

מהשוואת המקדמים לאפס נקבל:

$$2a_2+\alpha(\alpha+1)a_0=0$$
$$2\cdot 3a_3-2a_1+\alpha(\alpha+1)a_1=0$$
$$a_{n+2}(n+2)(n+1)-a_n n(n-1)-2a_n n+\alpha(\alpha+1)a_n=0$$

או

$$a_2=-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}a_0$$
$$a_3=-\frac{\alpha(\alpha+1)-2}{2\cdot 3}a_1=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2\cdot 3}a_1$$
$$a_{n+2}=-\frac{\alpha(\alpha+1)-n(n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n=-\frac{(\alpha-n)(\alpha+(n+1))}{(n+1)(n+2)}a_n$$

ועל ידי הנוסחאות האלה נקבל:

$$a_4=-\frac{(\alpha-2)(\alpha+(2+1))}{(2+1)(2+2)}a_2=$$
$$=\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{3\cdot 4}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}a_0=\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}a_0$$

$$a_5=-\frac{(\alpha-3)(\alpha+(3+1))}{(3+1)(3+2)}a_3=$$
$$=\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{4\cdot 5}\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2\cdot 3}a_1=\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}a_1$$

ובאופן כללי:

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{\alpha(\alpha-2)...(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)...(\alpha+2m-1)}{(2m)!}a_0$$

$$a_{2m+1}=(-1)^m\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)...(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)...(\alpha+2m)}{(2m+1)!}a_1$$

קיבלנו את הפתרון הכללי:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}x^{2m}+\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}x^{2m+1}=$$

$$=a_0\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha(\alpha-2)...(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)...(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m}\right)+$$

$$+a_1\left(x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)...(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)...(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right)$$

קל לראות כי הפתרון הינו צירוף ליניארי של שני פתרונות בלתי תלויים:

$$y_1(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha(\alpha-2)...(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)...(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m}$$

$$y_2(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)...(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)...(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

ב. (1) עבור $\alpha=2n$ כל המקדמים של החזקות הגבוהות מ $2n-$ בפונקציה $y_1(x)$ שווים לאפס, לכן הפתרון הינו פולינום זוגי מדרגה $2n$. למשל:

$$\alpha=0 \qquad y_1(x)=1$$

$$\alpha=2 \qquad y_1(x)=1-3x^2$$

$$\alpha=4 \qquad y_1(x)=1-10x^2+\frac{35}{3}x^4$$

ב. (2) עבור $\alpha=2n+1$ כל המקדמים של החזקות הגבוהות מ $2n+1-$ בפונקציה $y_2(x)$ שווים לאפס, לכן הפתרון הינו פולינום מדרגה $2n+1$. למשל:

$$\alpha=1 \qquad y_1(x)=x$$

$$\alpha=3 \qquad y_1(x)=x-\frac{5}{3}x^3$$

$$\alpha=5 \qquad y_1(x)=x-\frac{14}{3}x^3+\frac{21}{5}x^5$$

.2

א. המשוואה הנתונה היא משוואת אוילר. נחפש את הפתרון בצורה: $y(x)=(x-2)^r$:

$$(x-2)^2\cdot r(r-1)(x-2)^{r-2}+5(x-2)\cdot r(x-2)^{r-1}+8(x-2)^r=0$$
$$r(r-1)(x-2)^r+5r(x-2)^r+8(x-2)^r=0$$
$$r^2+4r+8=0$$
$$r_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-16}}{2}-2\pm 2i$$

קיבלנו שני שורשים מרוכבים צמודים, לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y(x)=C_1x^{-2}\cos(2\ln x)+C_2x^{-2}\sin(2\ln x)=\frac{C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)}{x^2}$$

ב. המשוואה הנתונה היא משוואת אוילר לא הומוגנית. נפתור קודם את המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$r(r-1)x^r+7rx^r+5x^r=0$$
$$r^2+6r+5=0$$
$$r_{1,2}=-1,-5$$

מכאן הפתרון של המשוואה ההומוגנית הוא $y(x)=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^5}$.

את הפתרון הפרטי נחפש על ידי ווריאצית פרמטר. נרשום את המשוואה:

$$y''+\frac{7}{x}y'+\frac{5}{x^2}y=\frac{1}{x}$$

ונחפש את הפתרון הפרטי בצורה $y_p(x)=\frac{C_1(x)}{x}+\frac{C_2(x)}{x^5}$, כאשר

$$\begin{cases}\frac{C_1'}{x}+\frac{C_2'}{x^5}=0\\ -\frac{C_1'}{x^2}-\frac{5C_2'}{x^6}=\frac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1'=\frac{x}{4}\\ C_2'=-\frac{x^5}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{x^2}{8}\\ C_2=-\frac{x^6}{24}\end{cases}$$

כלומר $y_p(x)=\frac{x}{8}-\frac{x}{24}=\frac{x}{12}$, ולכן הפתרון הכללי של המשוואה המקורית הוא

$$y(x)=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^5}+\frac{x}{12}$$

ג. המשוואה הנתונה היא משוואת אוילר לא הומוגנית. נפתור קודם את המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$r(r-1)x^r + rx^r + 4x^r = 0$$
$$r^2 + 4 = 0$$
$$r_{1,2} = \pm 2i$$

מכאן הפתרון של המשוואה ההומוגנית הוא $y(x) = C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x)$.
את הפתרון הפרטי נחפש על ידי ווריאצית פרמטר. נרשום את המשוואה :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = \frac{\sin(\ln x)}{x^2}$$

ונחפש את הפתרון הפרטי בצורה $y_p(x) = C_1(x)\cos(2\ln x) + C_2(x)\sin(2\ln x)$, כאשר

$$\begin{cases} C_1'\cos(2\ln x) + C_2'\sin(2\ln x) = 0 \\ -\dfrac{2C_1'\sin(2\ln x)}{x} + \dfrac{2C_2'\cos(2\ln x)}{x} = \dfrac{\sin(\ln x)}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{\sin(\ln x)\sin(2\ln x)}{2x} \\ C_2' = \dfrac{\sin(\ln x)\cos(2\ln x)}{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{\sin(\ln x)}{4} + \dfrac{\sin(3\ln x)}{12} \\ C_2 = \dfrac{\cos(\ln x)}{4} - \dfrac{\cos(3\ln x)}{12} \end{cases}$$

כלומר

$$y_p(x) = \left(-\frac{\sin(\ln x)}{4} + \frac{\sin(3\ln x)}{12}\right)\cos(2\ln x) +$$
$$+\left(\frac{\cos(\ln x)}{4} - \frac{\cos(3\ln x)}{12}\right)\sin(2\ln x) =$$
$$= \frac{\sin(2\ln x)\cos(\ln x) - \cos(2\ln x)\sin(\ln x)}{4} +$$
$$+\frac{\sin(3\ln x)\cos(2\ln x) - \cos(3\ln x)\sin(2\ln x)}{4} =$$
$$= \frac{\sin(\ln x)}{4} + \frac{\sin(\ln x)}{12} = \frac{\sin(\ln x)}{3}$$

ולכן הפתרון הכללי של המשוואה המקורית הוא :

$$y(x) = C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x) + \frac{\sin(\ln x)}{3}$$

ד. המשוואה הנתונה היא משוואת אוילר לא הומוגנית. נפתור קודם את המשוואה ההומוגנית המתאימה :

$$r(r-1)x^r - 2rx^r + 2x^r = 0$$
$$r^2 - 3r + 2 = 0$$
$$r_{1,2} = 1, 2$$

מכאן הפתרון של המשוואה ההומוגנית הוא $y(x)=C_1x+C_2x^2$.
את הפתרון הפרטי נחפש על ידי ווריאצית פרמטר. נרשום את המשוואה:

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=3+\frac{2\ln x}{x^2}$$

ונחפש את הפתרון הפרטי בצורה $y_p(x)=C_1(x)x+C_2(x)x^2$, כאשר

$$\begin{cases} C_1'x+C_2'x^2=0 \\ C_1'+2C_2'x=3+\dfrac{2\ln x}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'=-3-\dfrac{2\ln x}{x^2} \\ C_2'=\dfrac{3}{x}+\dfrac{2\ln x}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-3x+\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2}{x} \\ C_2=3\ln x-\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{2x^2} \end{cases}$$

כלומר

$$y_p(x)=-3x^2+2\ln x+2+3x^2\ln x-\ln x-\frac{1}{2}=3x^2\ln x+\ln x-3x^2+\frac{3}{2}$$

ולכן הפתרון הכללי של המשוואה המקורית הוא

$$y(x)=C_1x+C_2x^2+3x^2\ln x+\ln x+\frac{3}{2}$$

3. א. עבור המשוואה הנתונה $P(x)=2x$, $Q(x)=1$, $R(x)=x$, לכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 1}{2x}=\frac{1}{2}=p_0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x}{2x}=0=q_0$$

כלומר הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית.
המשוואה האינדקסית עבור המשוואה הזאת היא $r(r-1)+p_0r+q_0=0$, כלומר

$$r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=0$$

$$r^2-\frac{1}{2}r=0$$

השורשים שלה הם $r=0, r=\frac{1}{2}$, ממשיים שונים ונבדלים זה מזה במספר לא שלם.

נמצא את הפתרון המתאים לשורש הגדול $r=\frac{1}{2}$. נחפש את הפתרון בצורה

$$y(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

נגזור פעמיים ונקבל:

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}$$
$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

נציב אל המשוואה ונקבל:

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r-1}=0$$
$$2a_0r(r-1)x^{r-1}+2a_1(r+1)rx^r+a_0rx^{r-1}+a_1(r+1)x^r+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[2a_n(n+r)(n+r-1)+a_n(n+r)+a_{n-2}\right]x^{n+r-1}=0$$
$$a_0r(2r-1)x^{r-1}+a_1(r+1)(2r+1)x^r+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n(n+r)(2n+2r-1)+a_{n-2}\right]x^{n+r-1}=0$$

נשווה מקדמים לאפס:

$$\begin{cases}a_0r(2r-1)=0\\ a_1(r+1)(2r+1)=0\\ a_n(n+r)(2n+2r-1)+a_{n-2}=0\end{cases}$$

נציב $r=\frac{1}{2}$ ונקבל:

$$\begin{cases}a_0\cdot 0=0\\ a_1\cdot 3=0\\ a_nn\left(2n+1\right)+a_{n-2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0 \text{ - כלשהו}\\ a_1=0\\ a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n(2n+1)}\end{cases}$$

מכאן קל לראות כי $a_1=a_3=a_5=...=a_{2k+1}=...=0$. ועבור המקדמים אם אינדקסים זוגיים נקבל:

$$a_2=-\frac{a_0}{2\cdot 5}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 9}=\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{6\cdot 13}=-\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13}$$

$$a_{2k}=(-1)^k\,\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot\ldots 2k\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4k+1)}$$

לכן הפתרון המתאים ל- $r=\frac{1}{2}$ הוא:

$$y_1(x)=a_0x^{1/2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 4\cdot\ldots 2n\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}x^{2n}\right)$$

את הפתרון השני נחפש גם כן בצורה: $y(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$, רק עכשיו עבור $r=0$, כלומר $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. נגזור פעמיים ונקבל:

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}\quad ,y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$

נציב אל המשוואה:

$$2x\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}2a_nn(n-1)x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}2a_nn(n-1)x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-1}=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[2a_nn(n-1)+a_nn+a_{n-2}\right]x^{n-1}+a_1=0$$

מכאן נקבל את התנאים שהמקדמים אמורים לקיים:

$$\begin{cases} a_0 \text{ - כלשהו} \\ a_1=0 \\ a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n(2n-1)} \end{cases}$$

מכאן כמו קודם $a_1=a_3=a_5=\ldots=a_{2k+1}=\ldots=0$. ועבור המקדמים אם אינדקסים זוגיים נקבל:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 3}$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 7} = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7}$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 11} = -\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 11}$$
$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot \ldots 2k\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots\cdot (4k-1)}$$

לכן הפתרון המתאים ל – $r=0$ הוא :

$$y_2(x) = a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 4\cdot \ldots 2n\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots\cdot (4n-1)}x^{2n}\right)$$

ב. עבור המשוואה הנתונה $P(x)=3x^2$, $Q(x)=2x$, $R(x)=x^2$, לכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x}{3x^2} = \frac{2}{3} = p_0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{3x^2} = 0 = q_0$$

כלומר הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית.
המשוואה האינדקסית עבור המשוואה הזאת היא $r(r-1)+p_0r+q_0=0$, כלומר

$$r(r-1)+\frac{2}{3}r+0=0$$
$$r^2-\frac{1}{3}r=0$$

השורשים שלה הם $r=0, r=\frac{1}{3}$, ממשיים שונים ונבדלים זה מזה במספר לא שלם.
נמצא את הפתרון המתאים לשורש הגדול $r=\frac{1}{3}$. נחפש את הפתרון בצורה

$$y(x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

נגזור פעמיים ונקבל :

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

נציב אל המשוואה ונקבל :

$$3x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+2x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}3a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}2a_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}3a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}2a_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0$$

$$3a_0r(r-1)x^r+3a_1(r+1)rx^{r+1}+2a_0rx^r+2a_1(r+1)x^{r+1}+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[3a_n(n+r)(n+r-1)+2a_n(n+r)+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

$$a_0r(3r-1)x^r+a_1(r+1)(3r+2)x^{r+1}+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n(n+r)(3n+3r-1)+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

נשווה מקדמים לאפס:

$$\begin{cases} a_0r(3r-1)=0 \\ a_1(r+1)(3r+2)=0 \\ a_n(n+r)(3n+3r-1)+a_{n-2}=0 \end{cases}$$

נציב $r=\frac{1}{3}$ ונקבל:

$$\begin{cases} a_0\cdot 0=0 \\ a_1\cdot 4=0 \\ a_nn\left(3n+1\right)+a_{n-2}=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_0 \text{ - כלשהו} \\ a_1=0 \\ a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n(3n+1)} \end{cases}$$

מכאן קל לראות כי $a_1=a_3=a_5=...=a_{2k+1}=...=0$. ועבור המקדמים אם אינדקסים זוגיים נקבל:

$$a_2=-\frac{a_0}{2\cdot 7}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 13}=\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 13}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{6\cdot 19}=-\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 13\cdot 19}$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot ...2k\cdot 7\cdot 13\cdot ...\cdot(6k+1)}$$

לכן הפתרון המתאים ל $-$ $r=\frac{1}{3}$ הוא:

$$y_1(x)=a_0x^{1/3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 4\cdot ...2n\cdot 7\cdot 13\cdot ...\cdot(6n+1)}x^{2n}\right)$$

מכיוון שהשורשים שונים ונבדלים במספר לא שלם את הפתרון השני ניתן לחפש בדיוק באותה צורה כמו הפתרון הראשון. לכן מספיק להתחיל את התהליך משלב ההצבה $r=0$ למערכת התנאים שלמקדמים לקיים:

$$\begin{cases} a_0\cdot 0=0 \\ a_1\cdot 2=0 \\ a_n n(3n-1)+a_{n-2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 \text{ - כלשהו} \\ a_1=0 \\ a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n(3n-1)} \end{cases}$$

לכן כמו קודם $a_1=a_3=a_5=...=a_{2k+1}=...=0$. ועבור המקדמים אם אינדקסים זוגיים נקבל:

$$a_2=-\frac{a_0}{2\cdot 5}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 11}=\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 11}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{6\cdot 17}=-\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 11\cdot 17}$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot ...2k\cdot 5\cdot 11\cdot ...\cdot(6k-1)}$$

לכן הפתרון המתאים ל $r=0$ – הוא:

$$y_1(x)=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 4\cdot ...2n\cdot 5\cdot 11\cdot ...\cdot(6n-1)}x^{2n}\right)$$

4. א. עבור המשוואה הנתונה $P(x)=x$, $Q(x)=1-x$, $R(x)=\lambda$, לכן מקבלים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)}{x}=1=p_0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\lambda}{x}=0=q_0$$

כלומר הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית, ומשוואת האינדקסים עבורה:

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0 \Leftrightarrow r(r-1)+r=0 \Leftrightarrow r^2=0$$

יש למשוואה הזאת שורש אחד $r=0$ בעל ריבוי שתיים.

נמצא אחד מהפתרונות שלה בצורה $y(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

הנגזרות של הפתרון הן:

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}\ ,\ y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$$

נציב אל המשוואה ונקבל:

$$x\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+1)n + a_{n+1}(n+1) - a_n n + \lambda a_n\right] x^n + a_1 + \lambda a_0 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+1)^2 - a_n(n-\lambda)\right] x^n + a_1 + \lambda a_0 = 0$$

נשווה את המקדמים לאפס ונקבל:

$$\begin{cases} a_1 + \lambda a_0 = 0 \\ a_{n+1}(n+1)^2 - a_n(n-\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\lambda a_0 \\ a_{n+1} = a_n \dfrac{n-\lambda}{(n+1)^2} \end{cases}$$

כלומר

$$a_2 = a_1 \frac{1-\lambda}{2^2} = -a_0 \frac{\lambda(1-\lambda)}{2^2}$$

$$a_3 = a_2 \frac{2-\lambda}{3^2} = -a_0 \frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)}{2^2 \cdot 3^2}$$

$$a_n = -a_0 \frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(n-1-\lambda)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot n^2} = -a_0 \frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(n-1-\lambda)}{(n!)^2}$$

לכן הפתרון הוא:

$$y(x) = a_0\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(n-1-\lambda)}{(n!)^2} x^n\right)$$

ב. עבור $\lambda = m$ מספר שלם מקבלים שהמקדמים של החזקות החל מ – $m+1$ שווים לאפס, משמע $y(x)$ פולינום מדרגה m.

5. **(1)**. במשוואת בסל מסדר אפס $P(x) = x^2$, $Q(x) = x$, $R(x) = x^2$, לכן מתקיים:

$$\lim_{x\to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{x^2} = 1 = p_0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2} = 0 = q_0$$

כלומר הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית, ומשוואת האינדקסים עבורה:

$$r(r-1)+p_0 r+q_0=0 \Leftrightarrow r(r-1)+r=0 \Leftrightarrow r^2=0$$

יש למשוואה הזאת שורש אחד $r=0$ בעל ריבוי שתיים.

נמצא אחד מהפתרונות שלה בצורה $y(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

הנגזרות של הפתרון הן :

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2} \quad , y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}$$

נציב אל המשוואה ונקבל :

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2}=0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n n(n-1)+a_n n+a_{n-2}\right]x^n+a_1 x=0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n n^2+a_{n-2}\right]x^n+a_1 x=0$$

נשווה את המקדמים לאפס ונקבל :

$$\begin{cases} a_0 - \text{שרירותי} \\ a_1=0 \\ a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{n^2} \end{cases}$$

כלומר $a_1=a_3=a_5=...=a_{2k+1}=...=0$ ועבור המקדמים עם אינדקסים זוגיים מתקיים :

$$a_2=-\frac{a_0}{2^2}$$
$$a_4=-\frac{a_2}{4^2}=\frac{a_0}{2^2\cdot 4^2}$$
$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2k)^2}=\frac{(-1)^k a_0}{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k)^2}=\frac{(-1)^k a_0}{\left(2^k(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k)\right)^2}=\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2}$$

לכן הפתרון הוא :

$$y(x)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

אם נבחר $a_0 = 1$ נקבל כי $J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ אכן הפתרון של המשוואה.

(2) במשוואת בסל מסדר אחד $P(x) = x^2$, $Q(x) = x$, $R(x) = x^2 - 1$, לכן מתקיים:

$$\lim_{x \to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{x^2} = 1 = p_0$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 R(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x^2-1)}{x^2} = -1 = q_0$$

כלומר הנקודה $x = 0$ היא סינגולרית רגולרית, ומשוואת האינדקסים עבורה:

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \Leftrightarrow r(r-1) + r - 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 1$$

יש למשוואה הזאת שני שורשים $r = \pm 1$.
נמצא את הפתרון שמתאים לשורש הגדול $r = 1$ בצורה:

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

הנגזרות של הפתרון הן:

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+1) n x^{n-1} \quad , y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) x^n$$

נציב אל המשוואה ונקבל:

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+1) n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) x^n + (x^2 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+1) n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+1) n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) x^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n (n+1) n + a_n (n+1) - a_n + a_{n-2} \right] x^{n+1} + 2a_1 x^2 + a_0 x + 2a_1 x^2 - a_0 x - a_1 x^2 = 0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n n(n+2) + a_{n-2} \right] x^{n+1} + 3a_1 x^2 = 0$$

נשווה את המקדמים לאפס ונקבל:

$$\begin{cases} a_0 - \text{שרירותי} \\ a_1 = 0 \\ a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n(n+2)} \end{cases}$$

כלומר $0 = ... = a_{2k+1} = ... = a_5 = a_3 = a_1$ ועבור המקדמים עם אינדקסים זוגיים מתקיים :

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 4}$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 6} = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 8} = -\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$$
$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k+2)} = \frac{(-1)^k a_0}{2^k k!\cdot 2^k (k+1)!} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(k+1)!}$$

לכן הפתרון הוא :

$$y(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_0 x^{2n}}{2^{2n} n!(n+1)!} = a_0 x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_0 x^{2n}}{2^{2n} n!(n+1)!}$$

אם נבחר $a_0 = \dfrac{1}{2}$ נקבל כי $J_1(x) = \dfrac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(n+1)!}$ אכן הפתרון של המשוואה.

6. א. עבור המשוואה הנתונה $P(x) = x(1-x)$, $Q(x) = \gamma - (1+\alpha+\beta)x$, $R(x) = -\alpha\beta$, לכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\gamma-(1+\alpha+\beta)x)}{x(1-x)} = \gamma = p_0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2\alpha\beta}{x(1-x)} = 0 = q_0$$

כלומר הנקודה $x=0$ היא סינגולרית רגולרית ומשוואת האינדקסים היא :

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$
$$r(r-1) + \gamma r = 0$$
$$r(r-1+\gamma) = 0$$
$$r = 0, r = 1-\gamma$$

ב. בהנחה כי $r = 1-\gamma < 0$ לא שלם נקבל כי השורש $r=0$ הוא השורש הגדול של משוואת האינדקסים, לכן את הפתרון עבור השורש הזה נחפש בצורה :

$$y(x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

נגזור פעמיים ונקבל :

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}$$
$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

נציב אל המשוואה:

$$x(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+(\gamma-(1+\alpha+\beta)x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}-$$
$$-\alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\gamma(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(1+\alpha+\beta)(n+r)x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\alpha\beta x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n+1}(n+r+1)(n+r)x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+$$
$$+\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n+1}\gamma(n+r+1)x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(1+\alpha+\beta)(n+r)x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\alpha\beta x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{n+1}(n+r+1)(n+r+\gamma)-a_n\left((n+r)(n+r+\alpha+\beta)+\alpha\beta\right)\right]x^{n+r}+$$
$$+\left(a_0r(r-1)+a_0\gamma r\right)x^{r-1}=0$$

נשווה את המקדמים לאפס ונקבל:

$$\begin{cases} a_0r(r-1+\gamma)=0 \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n\left((n+r)(n+r+\alpha+\beta)+\alpha\beta\right)}{(n+r+1)(n+r+\gamma)} \end{cases}$$

נציב $r=0$:

$$\begin{cases} a_0 - \text{שרירותי} \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n\left(n(n+\alpha+\beta)+\alpha\beta\right)}{(n+\gamma)(n+1)} \end{cases}$$

כלומר

$$a_1 = \frac{a_0\alpha\beta}{\gamma} = a_0\,\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}$$

$$a_2 = \frac{a_1\left((1+\alpha+\beta)+\alpha\beta\right)}{2(1+\gamma)} = \frac{a_0\alpha\beta(1+\alpha)(1+\beta)}{2\gamma(1+\gamma)} = a_0\,\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}$$

$$a_3 = \frac{a_2\left(2(2+\alpha+\beta)+\alpha\beta\right)}{3(2+\gamma)} = \frac{a_2(\alpha+2)(\beta+2)}{3(2+\gamma)} = a_0\,\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}$$

$$a_n = a_0\,\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}$$

לכן הפתרון במקרה הזה:

$$y(x) = a_0\left(1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+...\right)$$

ג. מכיוון שהשורשים של משוואת האינדקסים שונים זה מזה במספר לא שלם את הפתרון השני ניתן למצוא בדיוק באותה הצורה כמו הפתרון הראשון. לכן נציב $r=1-\gamma$ לתנאי שהמקדמים אמורים לקיים ונקבל:

$$\begin{cases} a_0 - \text{שרירותי} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n(\alpha-\gamma+n+1)(\beta-\gamma+n+1)}{(n+2-\gamma)(n+1)} \end{cases}$$

כלומר

$$a_1 = a_0\,\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{1\cdot(2-\gamma)}$$

$$a_2 = \frac{a_1(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+2)}{2(3-\gamma)} = a_0\,\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{1\cdot 2(2-\gamma)(3-\gamma)}$$

$$a_n = a_0\,\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)...(\alpha-\gamma+n+1)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)...(\beta-\gamma+n+1)}{n!(2-\gamma)(3-\gamma)...(n+1-\gamma)}$$

לכן הפתרון הנוסף:

$$y(x) = a_0x^{1-\gamma}\left(1+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{1\cdot(2-\gamma)}x+ \right.$$
$$\left. +\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{1\cdot 2(2-\gamma)(3-\gamma)}x^2+...\right)$$