

### אלגברה מופשטת 3

#### שורשי יחידה – שדות טרנסצנדנטיים – פתרונות ע"י רדיקלים

1. הראו שאם  $\rho_n \in E \setminus F$  שורש יחידה  $n$ -י פרימיטיבי, אזי לכל  $\sigma \in Gal(E/F)$  מתקיים ש-  
 $\sigma(\rho_n)$  הוא שורש יחידה פרימיטיבי.  
תזכורת: שורש יחידה  $n$ -י נקרא פרימיטיבי אם הוא יוצר את חבורת שורשי היחידה ה- $n$ ים.
2. הראו שאם  $\rho_n \in F$  שורש יחידה  $n$ -י פרימיטיבי של היחידה, אזי חבורת גלואה של שדה הפיצול של פולינום  $x^n - a \in F[x]$  היא חבורה ציקלית מסדר המחלק את  $n$ .
3. חשבו את  $\Phi_{18}$ .
4. מצאו את כל הפולינומים הציקלוטומיים (פולינומים מינימליים של שרשי יחידה) כך שהפולינום הוא מדרגה 4. מצאו את שדה הפיצול המשותף של כל הפולינומים.
5. הראו שההרחבה  $\mathbb{Z}_p(x, y)$  היא הרחבה סופית של  $\mathbb{Z}_p(x^p, y^p)$  אך היא אינה הרחבה פשוטה.
6. תהי  $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}$  ההרחבה על ידי שדה הפונקציות הרציונליות מעל המרוכבים.  
 $\sigma$  ו- $\tau$  הם  $\mathbb{C}$ -אוטומורפיזמים של  $\mathbb{C}(t)$  המוגדרים על-ידי  $\sigma(t) = \rho_3 t$  ו- $\tau(t) = \frac{1}{t}$ .  
הראו ש- $\mathbb{C}(t)^G = \mathbb{C}(t^3 + t^{-3})$ , כאשר  $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ .
7. א. תהי  $E/F$  הרחבת גלואה עם  $[E:F] > 1$ . האם בהכרח קיימת הרחבת ביניים  $C/F$  עם דרגת הרחבה ראשונית? (רמז: השתמשו בת"ח של החבורה הסימטרית).  
הדרכה: כדי להביא דוגמה נגדית צריך להביא חבורה סופית (ניתן לממש כל חבורה סופית כחבורת גלואה של הרחבת גלואה) ללא ת"ח מאינדקס ראשוני. חבורה כזאת היא  $A_6$ .  
ב. מה אם נתון ש  $Gal(E/F)$  היא חבורה פתירה?