פתרון תרגיל 7

1. נסמן נקודה (x, x^2+2) על הפרבולה $y=x^2+2$. נחשב מרחק מהראשית $(0,0)$

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(x^2+2-0)^2}=\sqrt{x^2+x^4+2x^2+4}$$

$$d=\sqrt{x^4+3x^2+4}$$

נסמן $f(x)=\sqrt{x^4+3x^2+4}$

עלינו למצוא את המינימום של $f(x)$.

ל-$f(x)$ יש מינימום בנקודה מסויימת אם ורק אם לפונק' $g(x)=x^4+3x^2+4$ יש שם מינימום.

נמצא את הנקודות הקריטיות של g.

$$g'(x)=4x^3+6x=0$$

$$2x^3+3x=0$$

$$x(2x^2+3)=0$$

$\boxed{x=0}$ $\quad$ $2x^2+3=0$ אין פתרון

נגזרת שנייה. $g''(x)=12x^2+6$

$$g''(0)=6>0$$

לכן ב-$x=0$ מתקבל מינימום (גלובלי)

לכן הנקודה על הפרבולה היא $(0,2)$

והמרחק הוא $f(0)=\sqrt{4}=2$.

שימו לב: חישוב המרחק מתבצע ע"י הצבה ב-f ולא ב-g.

2) מצאו מינימום ומקסימום גלובליים עבור

$$f(x) = 2 + |3-x|$$

<u>פתרון</u>

$$f(x) = \begin{cases} 5-x, & x \le 3 \\ x-1, & x > 3 \end{cases}.$$

ניתן לבדוק לפי הגדרה ש-

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 3 \\ \text{undefined} & x = 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$ (תבדקו!)

לכן יש רק נק' קריטית והיא $x=3$. ובה הנגזרת לא קיימת.

נשים לב מהמשך הישר,

$$f(2)=3 > f(3) = 2 < f(4) = 3$$

לכן ב- $x=3$ מתקבל מינימום גלובלי. והמינימום הוא 2.

קל להראות שלא מתקבל מקסימום גלובלי.

שכן לכל $3>x>y$ מתקיים $f(3)<f(x)<f(y)$

שכן הנגזרת עבור $x<3$ הינה שלילית

כמו כן לכל $x>y>3$ מתקיים ~~[illegible]~~

$$f(3) < f(y) < f(x)$$

שכן הנגזרת חיובית לכל $x>3$.

ומכאן ניתן להסיק שלא מתקבל מקסימום.

3)

$$f(x)=\sqrt[5]{x^6}$$

א) האם קיימת הנגזרת השנייה $f''(0)$? אם כן, חשבו אותה. אם לא, הוכיחו שאינה קיימת.

פתרון

$$f'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{6}}$$

$$f''(0)=st\left(\frac{f'(\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\frac{6}{5}\Delta x^{\frac{1}{6}}-0}{\Delta x}\right)$$

$$=st\left(\frac{6}{5}\Delta x^{-\frac{5}{6}}\right)=st\left(\frac{6}{5\Delta x^{\frac{5}{6}}}\right)$$

Δx אינפ' לכן $\frac{6}{5\Delta x^{\frac{5}{6}}}$ אינסופי לכן

$f''(0)$ לא קיימת.

ב) האם לפונק' קיים מקסימום גלובלי? אם כן חשבו אותו. אם לא הוכיחו שלא.

פתרון

לא קיים מקסימום גלובלי.

עפ"י הנגזרת הפונק' עולה ממש בכל $\mathbb{R}$.

היא חיובית פרט לנקודה אחת בה היא מתאפסת.

מכאן שלא יכול להיות מקסימום גלובלי.

4) א)

$$f(x)=e^{1-(2-x)^4}$$

ב) תחום הגדרה: x ממשי.

ג) חיתוך עם הצירים:

חיתוך עם ציר ה-x: אין.

חיתוך עם ציר ה-y: נציב $x=0$

$$f(0)=e^{1-2^4}=e^{-15}$$

$$(0,e^{-15})$$

ג) נקודות קיצון

$$f'(x)=e^{1-(2-x)^4}\cdot(+4(2-x)^3)=0$$

$$(2-x)^3=0$$

$x=2$ נק' חשודה.

x	0	2	3
f'	+		−
f	↗	∩	↘

$(2,e)$ מקסימום

תחומי עלייה: $x<2$ תחומי ירידה: $x>2$.

ד) נקודות פיתול

$$f''(x)=-12(2-x)^2e^{1-(2-x)^4}+e^{1-(2-x)^4}\cdot4(2-x)^3\cdot4(2-x)^3=0$$

$$4e^{1-(2-x)^4}(2-x)^2\left[-3+4(2-x)^4\right]=0$$

$-3+4(2-x)^4=0$

$(2-x)^4=\frac{3}{4}$

$2-x=\pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

$x=2\pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

x		$2-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$		$2+\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$	
f''	$+$		$-$		$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$

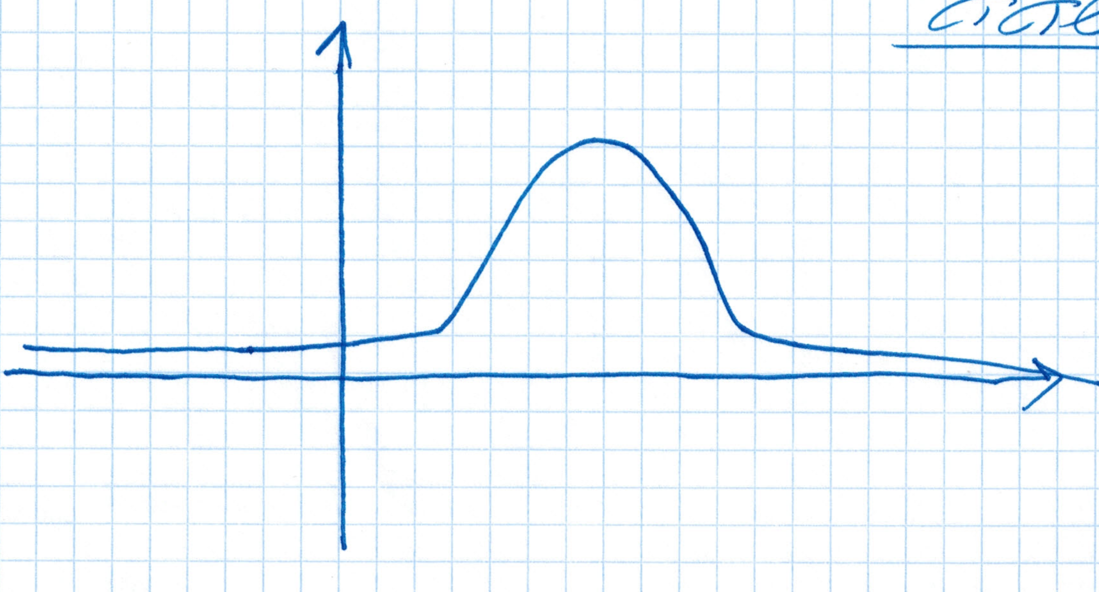
פיתול $\left(2+\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \sqrt[4]{e}\right)$

פיתול $\left(2-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \sqrt[4]{e}\right)$

תחום קעירות - $2-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}<x<2+\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

תחום קמירות $x>2+\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ או $x<2-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

סקיצה



ב) $f(x)=\cos^2x$ $\quad [0,\pi]$

א) תחום הגדרה: כל x ממשי

ב) חיתוך עם הצירים:

עם ציר ה-x: $y=0$

$$\cos^2x=0$$
$$\cos x=0$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$(\frac{\pi}{2},0)$

חיתוך עם ציר ה-y: $x=0$

$$\cos^2 0=1$$

$(0,1)$.

ג) נקודות קיצון

$$f'(x)=2\cos x(-\sin x)=0$$

$\cos x=0$ או $\sin x=0$

$$x=0,\frac{\pi}{2},\pi$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'		$-$		$+$	
f		↓	∪	↑	

$(\frac{\pi}{2},0)$ מינימום גלובלי ומקומי

$(0,1)$ מקסימום גלובלי

$(\pi,1)$ מינימום גלובלי

תחומי עלייה: $(\frac{\pi}{2}, \pi]$

תחומי ירידה: $[0, \frac{\pi}{2})$.

3) נקודות פיתול

$f'(x) = -\sin 2x$

$f''(x) = -2\cos 2x = 0$

$\cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$

בתחום הנתון, $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

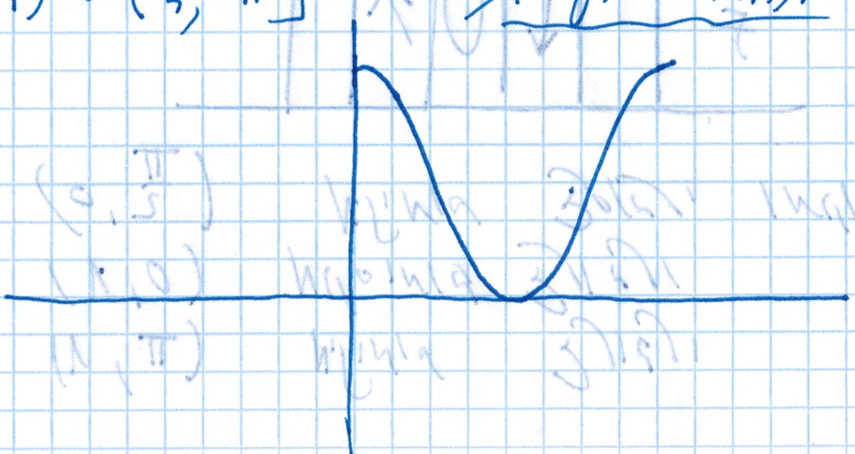
x		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	
f''	$-$		$+$		$-$
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$

פיתול $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$

פיתול $(\frac{3\pi}{4}, +\frac{1}{2})$

תחומי קמירות = $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

תחומי קעירות = $[0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi]$



ג.) $f(x) = x\sqrt{2x-1}$

א.) תחום הגדרה: $[\frac{1}{2}, \infty)$

ב.) חיתוך עם ציר ה-x:

$x\sqrt{2x-1} = 0$

$x = 0 \quad 2x-1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$(0,0)\ (\frac{1}{2},0)$

חיתוך עם ציר ה-y: אין.

ג.) נקודות קיצון

$f'(x) = 1\cdot\sqrt{2x-1} + \frac{2x}{2\sqrt{2x-1}} = 0$

$\sqrt{2x-1} + \frac{x}{\sqrt{2x-1}} = 0$

$(2x-1) + x = 0$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

נקודה קריטית אחת מחוץ לתחום הגדרה.

x	$\frac{1}{2}$	1
f'		$+$
f		$\nearrow$

$(\frac{1}{2}, 0)$ מינימום קצה.

נקודות פיתול

$$f'(x)=\frac{3x-1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f''(x)=\frac{3\sqrt{2x-1}-\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}\cdot(3x-1)}{2x-1}=0$$

$$3(2x-1)-3x+1=0$$

$$6x-3-3x+1=0$$

$$3x-2=0$$

$$\boxed{x=\frac{2}{3}}$$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
f''		$-$		$+$
f		$\cap$		$\cup$

נק' פיתול $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$

תחומי קעירות – $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

תחומי קמירות – $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$