פתרון תרגיל בית מספר 4

<u>שאלה 1</u>

הוכח או הפרך שהאוסף הבא מגדיר טופולוגיה:

א. $X=[0,\infty) \quad ^2=\{\varnothing, X,(a,\infty):\quad a\ge 0\}$

זו טופולוגיה: 1) $\varnothing, X\in {}^2$ מההגדרה.

2) חיתוך סופי. נשים לב שלכל $U,V\in {}^2$ מתקיים $(U\subseteq V)\vee(V\subseteq U)$ (בדקו!) לכן בהכרח $U\cap V\in {}^2$.

3)איחוד כלשהו. מ"ל שאם קיימת משפחה של אינדקסים I כך שלכל $i\in I$ $a_i\ge 0$ אזי $\bigcup_{i\in I}(a_i,\infty)\in {}^2$ (מדוע?) אבל טענה זו נכונה שכן

(*) $\bigcup_{i\in I}(a_i,\infty)=(a,\infty)$ באשר $a=\inf\{a_i:\quad i\in I\}$ וברור שבמקרה זה גם מתקיים $a\ge 0$

נוכיח את (*) באמצעות הכלה דו כיוונית:

$(\subseteq)$: יהי $x\in\bigcup_{i\in I}(a_i,\infty)$ אזי קיים $i_0\in I$ כך ש $x>a_{i_0}$. מכיון ש $a_{i_0}\ge a$ נקבל $x>a$ ולכן $x\in(a,\infty)$.

$(\supseteq)$: יהי $x\in(a,\infty)$ ונניח בשלילה ש $x\notin\bigcup_{i\in I}(a_i,\infty)$ אזי לכל $i\in I$ מתקיים $a_i\ge x$. מכאן x חסם מלרע של $\{a_i:\quad i\in I\}$. כעת $a=\inf\{a_i:\quad i\in I\}$ ו x חסם מלרע של $\{a_i:\quad i\in I\}$ מהגדרת אינפימום נקבל $x\ge a$ בסתירה לכך ש $x\in(a,\infty)$.

ב. $X=\mathbb{N} \quad ^2=\{\varnothing, X, A:\quad A\}$ תת קבוצה אינסופית ב- $\mathbb{N}$

זאת אינה טופולוגיה. שכן חיתוך של שתי תת קבוצות אינסופיות אינו בהכרח תת קבוצה אינסופית.

למשל: $\{1,2,4,8,16.....\},\{1,3,9,27...\}\in {}^2$ אך

$\{1,2,4,8,16.....\}\bigcap\{1,3,9,27...\}=\{1\}\notin {}^2$.

<u>שאלה 2</u>

א. נוכיח את שלוש התכונות:

1. $\varnothing\in {}^2{}_{co-\aleph_0}$ מההגדרה, $X\in {}^2{}_{co-\aleph_0}$ מכיוון ש- $|X^C|=|\varnothing|<\aleph_0$

2. יהיו $U,V\in {}^2{}_{co-\aleph_0}$. מקרה ראשון: $U=\varnothing\ \vee V=\varnothing$ אזי $U\bigcap V=\varnothing\in {}^2{}_{co-\aleph_0}$.

מקרה שני: $|U^c|,|V^c|\le\aleph_0$ אזי

$$\left|(U\bigcap V)^C\right|=\left|U^C\cup V^C\right|\le\left|U^c\right|+\left|V^c\right|\le\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$$

3. יהיו $\{U_i\}_{i\in I} \in 2_{co-\aleph_0}$. מקרה ראשון: $\forall i \;\; U_i=\varnothing$ אזי $\bigcup_{i\in I} U_i = \varnothing \in 2_{co-\aleph_0}$.

מקרה שני: קיים $i_0 \in I$ כך שהקבוצה ${U_{i_0}}^C$ בת מניה אבל $U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ ומכאן

${U_{i_0}}^c \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C$ ולכן נסיק שגם $\left|\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C\right| \le \aleph_0$ ומכאן $\bigcup_{i\in I} U_i \in 2_{co-\aleph_0}$.

הערה: ניתן היה מראש לעבור למשלים ולציין שקבוצה היא סגורה אם ורק אם היא בת מניה או המרחב כולו ואז להוכיח שאכן מתקיימות שלוש התכונות המאפיינות קבוצות סגורות .

ב. נוכיח הכלה דו כיוונית. ברור ש- $2_{co-\aleph_0} \subseteq 2_{disc}$ שכן $2_{disc} = P(X)$. נראה את ההכלה השניה. למעשה, יש להראות שכל תת קבוצה ב- X היא פתוחה לפי $2_{co-\aleph_0}$.

תהי $A \subseteq X$. מכיוון ש- $|X| \le \aleph_0$ מתקיים $|A^C| \le \aleph_0$ ולכן $A \in 2_{co-\aleph_0}$.

ג. כן, מכיון שהטופולוגיה הדיסקרטית מושרית מהמטריקה הדיסקרטית.

__שאלה 3__

א. כדי להוכיח ש 2 הטופולוגיה הדיסקרטית, מ"ל שלכל $x \in X$ הנקודון $\{x\}$ פתוח. X אינסופית- ידוע מבדידה שקיימות A,B זרות כך ש $A\cup B = X$ וגם A,B אינסופיות.

בה"כ $x \in A$. מתקיים $A, B\cup\{x\}$ אינסופיות ולכן $A, B\cup\{x\} \in 2$. 2 טופולוגיה ולכן סגורה לחיתוך סופי ומכאן $\{x\} = A \cap (B\cup\{x\}) \in 2$.

ב. בכל מ"ט $X,\varnothing$ סגוחות טריויאליות. לכן מהנתון קיימת במרחב סגוחה לא טריויאלית A . בפרט A, A^C סגורות השונות מ X. מהגדרת הטופולוגיה הקו-סופית נקבל ש A, A^C סופיות ומכאן $X = A\cup A^C$ סופית.

א. לא. נראה דוגמא נגדית. נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{R}$ באופן הבא: $2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, \{19\}\}$.

__שאלה 4__

נבדוק את שלוש התכונות:

1. $\varnothing \in 2_{\le}$ כי התנאי מתקיים באופן ריק , $X \in 2_{\le}$ כי $\forall x\in X \left(\underline{x} \subseteq X\right)$.
2. נוכיח סגירות לחיתוך אינסופי (שימו לב שזאת תכונה חזקה בהרבה מהתכונה ההכרחית הנדרשת בהגדרת טופולוגיה.) נניח $\forall i \in I\left(O_i \in 2_{\le}\right)$. לכל $j\in I$ מתקיים (עפ"י הגדרת הקבוצה הפתוחה O_j) $x \in \bigcap_{i\in I} O_i \subseteq O_j \Rightarrow \underline{x} \subseteq O_j$ ולכן

$\forall x\in X\left(x\in\bigcap_{i\in I}O_i \Rightarrow \underline{x}\subseteq\bigcap_{i\in I}O_i\right)$ (מכיון שההכלה הקודמת מתקיימת לכל $j\in I$)

ומכאן, $\bigcap_{i\in I}O_i \in {}^{2}{}_{\le}$.

3. נניח ש $\forall i\in I\left(O_i\in {}^{2}{}_{\le}\right)$ יהי $x\in\bigcup_{i\in I}O_i$ אזי קיים $i_0\in I$ כך ש $x\in O_{i_0}$ ומכיון ש O_{i_0} פתוחה נקבל ש $\underline{x}\subseteq O_{i_0}\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$ ולכן $\bigcup_{i\in I}O_i\in {}^{2}{}_{\le}$.

<u>שאלה 5</u>

א. ניקח סדרת קושי ב- A : $\{x_n\}\subseteq A$. נרצה להראות שהסדרה מתכנסת לנקודה ב- A . כעת, $\{x_n\}$ היא סדרת קושי ב- X ומכיוון ש- X שלם, קיים $x\in X$ כך ש- $x_n\to x$. בגלל ש- A סגורה היא מכילה את נקודות הגבול של הסדרות המתכנסות שלה, ולכן $x\in A$.

ב. על מנת להראות ש- A סגורה נראה שהיא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. תהי $\{x_n\}\subseteq A$ סדרה מתכנסת ל- $x\in X$. נרצה להראות ש- $x\in A$. אמנם, $\{x_n\}$ היא סדרה מתכנסת ולכן סדרת קושי. מכיוון ש- A שלם נקבל ש- $x_n\to y\in A$. כעת, X מרחב מטרי ולכן גבול הסדרה הוא יחיד ולכן $x=y$ ונסיק הדרוש.

<u>שאלת בונוס</u>

א) לא טופולוגיה. שימו לב ש $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=\bigcup_{r\in\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}:0<x<\sqrt{2}\right\}}\left[-r,r\right]$.

ב) לא טופולוגיה. שימו לב ש $\left(-2,2\right)=\bigcup_{r\in\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}:0<x<2\right\}}\left[-r,r\right]$.