

### תרגיל 3

1. קבעו אילו מהמטריקות הבאות שקולות על  $\mathbb{Z}$ ?

(א)  $d_5$ .

(ב)  $d_7$ .

(ג) מטריקה  $0-1$  כלומר

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

(ד) והמטריקה המושרית מהמטריקה הסטנדרטית על  $\mathbb{R}$  (כלומר  $d(x, y) = |x - y|$ ).

2. יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי. נגדיר  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  לפי

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

(א) הוכיחו כי  $\rho$  היא מטריקה.

(ב) הוכיחו כי  $\rho$  ו  $d$  שקולות.

(ג) הסיקו שכל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

3. כזכור, הוכחנו בתרגול שעל המרחב  $l_1$  של הסדרות הממשיות  $(x_i)$  כך ש  $\sum |x_i| < \infty$ , המטריקה  $d_1$  ומטריקת הסופרימום אינן שקולות. כמו כן, הוכחתם בהרצאה שמטריקות הן שקולות אמ"ם הן מגדירות את אותן קבוצות פתוחות. זה מוביל אותנו לתרגיל הבא:  
מצאו קבוצה פתוחה ב  $(l_1, d_1)$  שאינה פתוחה ב  $(l_1, d_\infty)$ .

4. א. יהי  $X$  מרחב מטרי שלם, ו  $A \subseteq X$  תת מרחב. הוכיחו שאם  $A$  סגורה ב  $X$ , אז  $A$  מרחב מטרי שלם.

ב. הראו שאם  $X$  אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש  $A$  סגורה ב  $X$ , אבל  $A$  לא מרחב שלם).

ג. יהי  $X$  מרחב מטרי כלשהו, ו  $A \subseteq X$  תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו ש  $A$  סגורה ב  $X$ .

ד. יהי  $X$  מרחב מטרי שלם, ו  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו:  $f[X]$  תת מרחב שלם של  $\mathbb{R}$ .

5. יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי. נגדיר את הקוטר של תת-קבוצה  $A \subseteq X$  על ידי:

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא ריקות  $\dots \subseteq F_{n+1} \subseteq F_n \subseteq \dots \subseteq X$  מתקיים  $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .  
 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ .  
 זהו הקריטריון של קנטור לשלמות.

6. נתבונן במרחב  $C[0, 1]$ , מרחב כל הפונקציות הרציפות  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  עם מטריקת המקסימום.

(א) תהי  $a \in [0, 1]$ . נגדיר פונקציה  $F_a : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי:  $F_a(f) = f(a)$ . הוכיחו שזו פונקציה רציפה.

(ב) הוכיחו שהקבוצה  $\{f \in C[0, 1] : f(\frac{1}{3}) < 19\}$  פתוחה ב-  $C[0, 1]$ .

7. יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי,  $a \in X, A \subseteq X$ . הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

$$f_a(x) = d(x, a) \quad (\text{א})$$

$$f_A(x) = d(x, A) \quad (\text{ב})$$

8. יהי  $(X, d)$  מ"מ ו  $a \in X$ . הוכיחו שהקבוצה הבאה:  $S[a, r] = \{x \in X : d(x, a) = r\}$  סגורה.

9. תנו דוגמה קבוצה פתוחה ב-  $(C[0, 1], d_{max})$  שאינה פתוחה ב-  $(C[0, 1], d_1)$ .