(א) ראשית, נשים לב שאם $a>0$, $f(a)>0$ ואם $a<0$ אז $f(a)<0$. אם $a=0$ אז $f(a)=0$.

כעת, יהיו a,b המקיימים: $f(a)=f(b)$. לפי מה שציינו, פירוש הדבר שהסימנים של a,b זהים.

אם $a,b>0$, נקבל $|a|=a,|b|=b$ ולכן:

$$f(a)=\frac{a}{1+a}=\frac{b}{1+b}=f(b)$$

לכן:

$$a(1+b)=b(1+a)\Longrightarrow a+ab=b+ba\Longrightarrow a=b$$

אם $a,b<0$, נקבל $|a|=-a,|b|=-b$ ולכן:

$$f(a)=\frac{a}{1-a}=\frac{b}{1-b}=f(b)$$

לכן:

$$a(1-b)=b(1-a)\Longrightarrow a-ab=b-ba\Longrightarrow a=b$$

בכל מקרה נקבל שאם $f(a)=f(b)$ אז $a=b$ (אם $a=b=0$ הדבר ברור) ולכן f חח"ע.

מצד שני, נשים לב שמתקיים:

$$|f(x)|=\left|\frac{x}{1+|x|}\right|\leq\left|\frac{x}{|x|}\right|=1$$

ולכן עבור $2\in\mathbb{R}$ למשל לא קיים $x\in\mathbb{R}$ המקיים $f(x)=2$ ולכן f אינה על.

(ב) נשים לב שעבור $-2,-5\in\mathbb{R}$, $-2\neq-5$ אך $f(-2)=f(-5)=0$ ולכן f אינה חח"ע.

מצד שני, נשים לב שהפונקציה שלנו מתארת פרבולה "מחייכת", שקודקודה נמצא בנקודה:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{7}{2}\Longrightarrow y=f\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{9}{4}$$

כלומר, הערך המינימלי אותו יכולה הפונקציה לתת הוא $-\frac{9}{4}$, ולכן למשל עבור $-3\in\mathbb{R}$ לא קיים $x\in\mathbb{R}$ המקיים $f(x)=-3$.

(ג) ראשית, יהיו $(a,b),(c,d)$ המקיימים $f(a,b)=f(c,d)$. כלומר:

$$(a+b,a-b)=(c+d,c-d)$$

לכן:

$$\begin{cases} a+b=c+d \\ a-b=c-d \end{cases}$$

אם נחבר את המשוואות נקבל $2a=2c$ כלומר $a=c$.
אם נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה נקבל $2b=2d$ כלומר $b=d$.
לכן בסה"כ $(a,b)=(c,d)$. כלומר אם $f(a,b)=f(c,d)$ אז $(a,b)=(c,d)$ ולכן הפונקציה חח"ע.
מצד שני, עבור $(1,0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, אם קיים $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ המקיים $f(x,y)=(1,0)$, נקבל:

$$(x+y,x-y)=(1,0)$$

לכן:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

ומכאן $x=y=\frac{1}{2}$ בסתירה לכך ש: $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. לכן הפונקציה אינה על. (אפשר לראות שלמערכת יש פתרון יחיד באמצעות מה שלמדתם על מערכת של משוואות ליניאריות ומטריצות).

(ד) $f(\{1\},\{2\})=f(\{2\},\{1\})=(\{1,2\},\emptyset)$ אך $(\{1\},\{2\})\neq(\{2\},\{1\})$ ולכן הפונקציה אינה חח"ע.
מצד שני, נשים לב שתמיד $A\cap B\subseteq A\cup B$, ולכן בתמונה $f(A,B)=(A\cup B,A\cap B)$ הרכיב הראשון תמיד מכיל את הרכיב השני.
לכן עבור $(\{1\},\{2\})\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ לא קיים $(A,B)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ המקיים $f(A,B)=(\{1\},\{2\})$ ולכן הפונקציה אינה על.

(ה) נתבונן בקבוצה $A=\{1,2,4,6,8,10,\dots\}=\{1\}\cup 2\mathbb{N}\subseteq\mathbb{N}$. נשים לב שכל מספר טבעי $n>1$ אפשר לכתוב כסכום של שני מספרים מהקבוצה. אם n אי זוגי אז $1,n-1\in A$ מקיימים: $n=n-1+1$. אם n זוגי גדול מ-2, $n-2,2\in A$ מקיימים: $n=n-2+2$, ואם $n=2$, $1,1\in A$ מקיימים: $1+1=2$. לכן $f(A)=\mathbb{N}\setminus\{1\}$.
כמו כן, אם נתבונן בקבוצה $\mathbb{N}$ קל לראות שלכל $n>1$ טבעי קיימים $n-1,1\in\mathbb{N}$ המקיימים $n-1+1=n$, ומצד שני לכל $x,y\in\mathbb{N}$ מתקיים $x+y>1$, ולכן $f(\mathbb{N})=\mathbb{N}\setminus\{1\}$.
לפיכך, $f(A)=f(\mathbb{N})$ אך $A\neq\mathbb{N}$ ולכן הפונקציה אינה חח"ע.
מצד שני, כפי שראינו לכל x,y טבעיים מתקיים $x+y>1$, ולכן עבור $\{1\}\in P(\mathbb{N})$ לא קיימת $A\in P(\mathbb{N})$ המקיימת $f(A)=\{1\}$ ולכן הפונקציה אינה על.

2. (א) נמצא בכל סעיף פונקציה מתאימה ונסביר למה היא כזו.

i. חח"ע ועל: $f(n)=n$. זו פונקציה הפיכה (זו פונקצית הזהות) ולכן חח"ע ועל (ולא קשה לראות במפורש).

ii. חח"ע ולא על: $f(n)=2n$. הפונקציה חח"ע, כי אם $a\neq b$ אז $2a\neq 2b$ כלומר $f(a)\neq f(b)$. הפונקציה אינה על, למשל עבור $1\in\mathbb{N}$ לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $f(n)=1$.

iii. על ולא חח"ע: $f(n)$ היא מספר הספרות של n. הפונקציה אינה חח"ע, למשל $f(1241)=f(8475)=4$ אך $1241\neq 8475$. הפונקציה על, כי לכל $n\in\mathbb{N}$ המספר $111\ldots1$ (n פעמים הספרה 1) מקיים:

$$f(111\ldots1)=n$$

iv. לא חח"ע ולא על: $f(n)$ היא מספר הספרות של $n+10$. f אינה חח"ע כמו בסעיף הקודם. כעת, f גם אינה על מכיוון שלכל $n\in\mathbb{N}$, $f(n)\geq 2$ ולכן עבור $1\in\mathbb{N}$ לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $f(n)=1$.

(ב) כעת, הקבוצות סופיות, ולכן פונקציה ביניהן היא חח"ע אם ורק אם היא על. לכן, אפשר למצוא פונקציה חח"ע ועל ופונקציה שאינה חח"ע ואינה על, אך לא פונקציה חח"ע ולא על או פונקציה על ולא חח"ע.
כלומר, היינו מצליחים לענות על שני סעיפים (הראשון והאחרון).