תזכורת:

יחס $f\subseteq A\times B$ נקרא פונקציה, אם הוא מקיים את התכונה הבאה: לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד, כך ש: $(a,b)\in f$; כלומר, לכל איבר בקבוצה השמאלית יש איבר אחד בדיוק בקבוצה הימנית שנמצא איתו ביחד בזוג.

למשל: $A=\{1,2,3\}\,,B=\{1,2,3,4\}$. נתבונן ביחסים:

$$f_1=\{(1,1)\,,(1,2)\,,(2,2)\,,(3,4)\}$$

$$f_2=\{(1,1)\,,(2,1)\,,(3,4)\}$$

$$f_3=\{(1,1)\,,(3,3)\}$$

$$f_4=\{(1,1)\,,(2,4)\,,(3,3)\}$$

f_1 לא פונקציה, כי ל־$1\in A$ יש יותר מ־b יחיד שמתאים לו, גם $1\in B$ מקיים: $(1,1)\in f_1$ וגם $2\in B$ מקיים: $(1,2)\in f_1$.

f_2 פונקציה. f_3 לא פונקציה, כי ל־$2\in A$ אין איבר מתאים מ־B. f_4 פונקציה.

לפונקציות יש סימונים ומינוחים מיוחדים. אם $f\subseteq A\times B$ היא פונקציה, נסמן $f:A\to B$. נאמר ש־A היא התחום של f ו־B היא הטווח של f, ונסמן:

$$A=Dom\,(f)\,,B=Ran\,(f)$$

כמו כן, אם $(a,b)\in f$, נסמן: $f\,(a)=b$, ונאמר ש־a הוא המקור של b ו־b הוא התמונה של a.

בבית הספר ראינו פונקציות ממשיות (מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$), עם תחום הגדרה מעט קטן יותר מ־$\mathbb{R}$. למשל:

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

ב. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

ג. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

כעת, יהיו V,W שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $T:V\to W$ נקראת העתקה ליניארית, אם היא מקיימת את התכונה הבאה: לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים:

$$T(\alpha v_1+v_2)=\alpha T(v_1)+T(v_2)$$

<u>הרכבת פונקציות:</u>

תהיינה A,B,C קבוצות, $f:A\to B, g:B\to C$ פונקציות; ההרכבה של f,g מסומנת: $g\circ f:A\to C$ (g על f) המוגדרת כך:

$$g\circ f(x)=g(f(x))$$

לקחת את g ובמקום x להציב בה את $f(x)$. נשים לב שכדי שההרכבה תהיה מוגדרת, התחום של g והטווח של f צריכים להיות שווים. למשל:

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (פונקציות של בית הספר), $f(x)=x^2, g(x)=x+1$. מתקיים:

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g\left(x^2\right)=x^2+1$$

$$f\circ g\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(x+1\right)=\left(x+1\right)^{2}$$

נשים לב ש: $f\circ g\neq g\circ f$; הרכבת פונקציות היא לא חילופית. כמו כן:

$$f\circ f\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x^{2}\right)=\left(x^{2}\right)^{2}=x^{4}$$

$$f\circ g\circ f\left(x\right)=f\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)=f\left(x^{2}+1\right)=\left(x^{2}+1\right)^{2}$$

*הרכבת פונקציות היא קיבוצית: $f\circ\left(g\circ h\right)=\left(f\circ g\right)\circ h$.

מכיוון שהעתקות ליניאריות הן מקרה פרטי של פונקציות, אפשר לדבר על הרכבת העתקות ליניאריות - U,V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, $T:U\to V,S:V\to W$ העתקות ליניאריות, ההרכבה $S\circ T:U\to W$ מוגדרת.

<u>טענה:</u>

הרכבת העתקות ליניאריות היא העתקה ליניארית.

<u>הוכחה:</u>

יהיו $u_{1},u_{2}\in U$ ו-$\alpha\in\mathbb{F}$, צ"ל: $S\circ T\left(\alpha u_{1}+u_{2}\right)=\alpha\left(S\circ T\right)\left(u_{1}\right)+S\circ T\left(u_{2}\right)$. אנחנו יודעים ש-$T,S$ העתקות ליניאריות, ולכן:

$$S\circ T\left(\alpha u_{1}+u_{2}\right)=S\left(T\left(\alpha u_{1}+u_{2}\right)\right)=S\left(\alpha T\left(u_{1}\right)+T\left(u_{2}\right)\right)=$$

כי T העתקה ליניארית; גם S העתקה ליניארית, ולכן:

$$\alpha S\left(T\left(u_{1}\right)\right)+S\left(T\left(u_{2}\right)\right)=\alpha\left(S\circ T\right)\left(u_{1}\right)+S\circ T\left(u_{2}\right)$$

כנדרש.

<u>סימון ומינוח:</u>

העתקת הזהות – הפונקציה $I_V : V \to V$ ואפשר לסמן "סתם" I אם ברור מההקשר מיהו V. המוגדרת ע"י: $I(v) = v$ (כל איבר הולך לעצמו) נקראת העתקת הזהות (של v); זו העתקה ליניארית. מתקיים: $T \circ I = I \circ T = T$.
באופן כללי, העתקה ליניארית $T : V \to V$ שבה התחום והטווח שווים, נקראת אופרטור. לכן, להעתקת הזהות אפשר לקרוא אופרטור הזהות.

<u>משפט ההגדרה:</u>

מוטיבציה. נניח שיש לנו פונקציה של בית הספר, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נניח שאנחנו יודעים ש: $f(1) = 6$. מהי f? כלומר, מהו $f(x)$ לכל x? אין לנו, כמובן, דרך לדעת זאת; יש אינסוף פונקציות שמקיימות את התנאי הזה.
אבל, אם $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ העתקה ליניארית המקיימת: $T(1) = 6$, אנחנו יודעים מהי T; לכל x, נקבל ש:

$$T(x) = T(x \cdot 1) = x \cdot T(1) = 6x$$

מספיק לדעת איך T פועלת על איבר אחד כדי לדעת מהי T...באופן כללי, אם אנחנו יודעים איך T פועלת על איברי בסיס, אפשר לדעת מהי T, איך T פועלת על כל איבר ואיבר במרחב. הניסוח הפורמלי של הטענה הזו נקרא משפט ההגדרה של העתקות ליניאריות.

<u>משפט:</u>

יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. כעת, יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ בסיס של V, ויהיו $w_1, \ldots, w_n \in W$ וקטורים כלשהם ב־W (לא בהכרח שונים). אזי, קיימת העתקה ליניארית $T : V \to W$ יחידה, המקיימת:

$$T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n$$

בדוגמה שלנו, $v_1 = 1, w_1 = 6$.

הוכחה:

צריך להוכיח שיש T כזו, ושהיא יחידה.

ראשית, כל $v \in V$ אפשר להציג כצירוף ליניארי של איברי הבסיס: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. נגדיר את T באופן הבא:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$$

כלומר, T מחליפה את $v_1, \ldots, v_n$ ב־$w_1, \ldots, w_n$ בהתאמה, הסקלרים נשארים אותו הדבר.

כך, $T(v_i) = w_i$, כי: $T(v_i) = T(0 \cdot v_1 + \ldots + 1 \cdot v_i + \ldots 0 \cdot v_n) = 0 \cdot w_1 + \ldots + 1 \cdot w_i + \ldots + 0 \cdot w_n = w_i$; כשרוצים להציג את v_i ששייך לבסיס כצירוף ליניארי של איברי הבסיס, הסקלרים הם: $\alpha_j = 0$ כאשר $i \neq j$, ו: $\alpha_i = 1$.

שנית, נוכיח ש־T הזו היא אכן העתקה ליניארית; יהיו $u, v \in V$ ו־$\alpha \in \mathbb{F}$; צ"ל: $T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$.

אם כן, קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כך ש: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ וקיימים $\beta_1, \ldots, \beta_n$ כך ש: $u = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$. כעת:

$$T(\alpha u + v) = T(\alpha(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) =$$

$$T((\alpha\beta_1 + \alpha_1) v_1 + \ldots + (\alpha\beta_n + \alpha_n) v_n) =$$

כעת, T מחליפה את $v_1, \ldots, v_n$ ב־$w_1, \ldots, w_n$ בהתאמה, הסקלרים נשארים אותו הדבר ונקבל:

$$(\alpha\beta_1 + \alpha_1) w_1 + \ldots + (\alpha\beta_n + \alpha_n) w_n = \alpha(\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n) + \alpha_1 w_1 + \ldots + \ldots \alpha_n w_n =$$

$$= \alpha T\left(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n\right) + T\left(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\right) = \alpha T\left(u\right) + T\left(v\right)$$

נותר לנו להראות ש־T היא ההעתקה הליניארית היחידה המקיימת זאת.

נניח בשלילה שקיימת העתקה ליניארית $S : V \to W$, $S \neq T$ המקיימת: $S\left(v_i\right) = w_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

מכיוון ש־$S \neq T$, קיים $v \in V$ כך ש: $S\left(v\right) \neq T\left(v\right)$. כעת, קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כך ש: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. מצד אחד:

$$T\left(v\right) = T\left(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\right) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$$

מצד שני:

$$S\left(v\right) = S\left(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\right) = \alpha_1 S\left(v_1\right) + \ldots + \alpha_n S\left(v_n\right) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$$

קיבלנו ש: $S\left(v\right) = T\left(v\right)$, סתירה.

<u>מסקנה:</u> אם אנחנו יודעים איך T פועלת על איברי בסיס, אפשר למצוא את T מפורשות - לדעת איך T פועלת על כל וקטור. מה אנחנו צריכים לעשות? לבטא וקטור כללי כצירוף ליניארי של איברי הבסיס.

למשל: נניח ש: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית המקיימת: $T\left(1,1\right) = \left(2,3\right), T\left(0,1\right) = \left(4,0\right)$. נמצא את T מפורשות, כלומר: $T\left(x,y\right)$ לכל x, y. כדי לעשות זאת, אנחנו צריכים לבטא את הוקטור הכללי $\left(x,y\right)$ כצירוף ליניארי של איברי הבסיס: $\left\{\left(1,1\right),\left(0,1\right)\right\}$, ואז:

$$T\left(x,y\right) = T\left(\alpha_1\left(1,1\right) + \alpha_2\left(0,1\right)\right) = \alpha_1 T\left(1,1\right) + \alpha_2 T\left(0,1\right) =$$

$$\alpha_1\left(2,3\right) + \alpha_2\left(4,0\right) = \left(2\alpha_1 + 4\alpha_2, 3\alpha_1\right)$$

אנחנו מחפשים סקלרים α_1, α_2 עבורם: $(x,y) = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (0,1)$; זו מערכת משוואות עם שתי משוואות ושני נעלמים, הסקלרים. פותרים, ומקבלים: $\alpha_1 = x, \alpha_2 = y - x$. לכן, כפי שכבר ראינו:

$$T(x,y) = (2\alpha_1 + 4\alpha_2, 3\alpha_1) = (4y - 2x, 3x)$$

<u>הערות:</u>

1. אם הקבוצה רק בת"ל, כלומר "חלק" מבסיס, יש אינסוף העתקות ליניאריות. שיקיימו את הנתון. למשל, נניח שנתון לנו ש: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית המקיימת: $T(1,1) = (2,3)$. למה יש אינסוף העתקות? את $(1,1)$ אפשר להשלים לבסיס של $\mathbb{R}^2$ באינסוף דרכים שונות עם וקטור v_2, ואז יש לנו אינסוף דרכים לבחור את התמונה של v_2: $T(v_2) = w_2$; לפי משפט ההגדרה לכל v_2 ולכל w_2 קיימת העתקה ליניארית יחידה המקיימת: $T(1,1) = (2,3), T(v_2) = w_2$.

2. מצד שני, אם הקבוצה עליה T מוגדרת היא תלויה ליניארית, כדי שההעתקה תהיה מוגדרת אנחנו צריכים שהתלות בין איברי הקבוצה תישמר גם בין התמונות שלהם. למשל, נניח ש־T מקיימת: $T(1,1) = (2,3), T(0,1) = (4,0), T(2,2) = (3,3)$. אם T העתקה ליניארית, היא צריכה לקיים:

$$(3,3) = T(2,2) = T(2 \cdot (1,1)) = 2T(1,1) = 2 \cdot (2,3) = (4,6)$$

וזה לא יכול להיות. מצד שני, אם הנתונים היו: $T(1,1) = (2,3), T(0,1) = (4,0), T(2,2) = (4,6)$, אז הייתה העתקה ליניארית כזו. למה? כי התלות הליניארית בין איברי הקבוצה שעליה T מוגדרת: $2 \cdot (1,1) + 0 \cdot (0,1) = 1 \cdot (2,2)$ נשמרת גם בין התמונות:

$$2 \cdot T(1,1) + 0 \cdot T(0,1) = 1 \cdot T(2,2)$$

<u>גרעין ותמונה:</u>

יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\rightarrow W$ העתקה ליניארית.

1. הגרעין של T מסומן $\ker T$, זו קבוצת כל הוקטורים ב־v שתמונתם היא אפס:

$$\ker T=\{v\in V|T\left(v\right)=0_W\}$$

2. התמונה של T מסומנת ImT, זו קבוצת כל התמונות של איברים מ־v:

$$ImT=\{T\left(v\right)|v\in V\}$$

למשל: $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$, המוגדרת ע"י: $T\left(x,y,z\right)=\left(x+y,y+2z,0\right)$. נמצא את הגרעין ואת התמונה.

$$\ker T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|T\left(x,y,z\right)=(0,0,0)\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\left(x+y,y+2z,0\right)=(0,0,0)\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(0,0,0)\right\}$$

פתרון המערכת הוא: $(2t,-2t,t)$, כלומר:

$$\ker T=\left\{\left(2t,-2t,t\right)|t\in\mathbb{R}\right\}=sp\left\{\left(2,-2,1\right)\right\}$$

התמונה היא:

$$ImT=\left\{T\left(x,y,z\right)\mid\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{3}\right\}=\left\{\left(x+y,y+2z,0\right)\mid\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{3}\right\}$$

$$=\left\{x\left(1,0,0\right)+y\left(1,1,0\right)+z\left(0,2,0\right)\right\}=sp\left\{\left(1,1,0\right),\left(1,0,0\right),\left(0,2,0\right)\right\}$$

ולכן התמונה היא תת־מרחב של $\mathbb{R}^3$. שימו לב שהקבוצה הפורשת היא לא בת"ל.

<u>הערות:</u>

יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית.

1. $\ker T\le V$ (הגרעין הוא תת־מרחב של התחום), הוא מיוצג ע"י מערכת משוואות ליניאריות הומוגני. כמו כן, $ImT\le W$ (התמונה היא תת־מרחב של הטווח). נראה עוד מעט.
2. אם אפשר לרשום: $T\left(v\right)=Av$, אז: $\ker T=N\left(A\right),ImT=C\left(A\right)$ (הגרעין הוא מרחב האפס של המטריצה, התמונה היא מרחב העמודות). נבין עוד שתי הרצאות.
3. נשים לב שבדוגמה שלנו: $\dim\ker T+\dim ImT=\dim\mathbb{R}^3$. זה נכון תמיד: $\dim\ker T+\dim ImT=\dim V$ (המימד של הגרעין ועוד המימד של התמונה שווה למימד של התחום). משפט זה נקרא משפט הדרגה, נוכיח בהרצאה הבאה.

<u>טענה:</u>

יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to W$ העתקה

ליניארית. יהי $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V. אזי:

$$ImT=sp\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$$

כלומר, התמונה היא המרחב הנפרש ע"י התמונות של איברי בסיס.

לכן, כדי למצוא את התמונה, אפשר לבחור בסיס, לחשב את התמונות של איבריו; התמונה היא המרחב הנפרש על ידיהן.

למשל, בדוגמה הקודמת, $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, המוגדרת ע"י: $T(x,y,z)=(x+y,y+2z,0)$. נבחר בסיס כלשהו לתחום $\mathbb{R}^3$, למשל:

$$B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

לכן:

$$ImT=sp\{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\}=sp\{(1,0,0),(1,1,0),(0,2,0)\}$$

<u>מסקנה:</u> תמונה היא אכן תת־מרחב של הטווח, כי היא מרחב נפרש ומרחב נפרש הוא תמיד תת־מרחב.

<u>הוכחת הטענה:</u>

מכיוון ש־B בסיס, כל וקטור ב־V אפשר לרשום כצירוף ליניארי של איברי B: $v=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n$. לכן:

$$ImT=\{T(v)\,|v\in V\}=\{T(\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n)\,|\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}\}$$

T העתקה ליניארית, ולכן:

$$=\{\alpha_1T(v_1)+\ldots+\alpha_nT(v_n)\,|\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}\}=sp\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$$

*סימון: $T\circ T=T^2$, ובאופן כללי T^n פירושו $T\circ T\circ\ldots\circ T$ n פעמים.

<u>טענה:</u>

אם $T:V\to V$ אופרטור ליניארי, אז אם $m<n$ טבעיים, אז: $\ker T^m\subseteq\ker T^n$, $ImT^n\subseteq ImT^m$. אינטואיטיבית, ככל שמרכיבים את ההעתקה על עצמה, הגרעין לא קטן והתמונה לא גדלה.

נסביר. אם $v\in\ker T^m$, אז: $T^m(v)=0$ (לפי הגדרת הגרעין - כל הוקטורים שההעתקה שולחת ל־0). $m<n$, ולכן נפעיל על שני אגפי השוויון את T^{n-m}:

$$T^{n-m}\left(T^m(v)\right)=T^{n-m}(0)\Longrightarrow T^n(v)=0$$

ולפי הגדרת הגרעין, נקבל שאכן: $v\in\ker T^n$. סה"כ: $\ker T^m\subseteq\ker T^n$.

למשל: $T(x,y)=(0,x)$. $\ker T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|T(x,y)=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\,(0,x)=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=0\}=\{(0,y)\,|y\in\mathbb{R}\}$. מצד שני, $T^2(x,y)=T(T(x,y))=T(0,x)=(0,0)$, כלומר: $\ker T^2=\mathbb{R}^2$ (T^2 שולחת לאפס את כל הוקטורים ב־$\mathbb{R}^2$), ואכן: $\ker T\subset\ker T^2$.

<u>העתקה ליניארית חד־חד־ערכית ועל:</u>

שוב, בדידה – המושגים של חד־חד־ערכית (חח"ע) ועל רלוונטיים לכל פונקציה, ולא רק להעתקות ליניאריות.

תהיינה A,B קבוצות ו־$f:A\to B$ פונקציה ביניהן.

1. נאמר ש־f חח"ע, אם למקורות שונים יש תמונות שונות. כלומר:

$$\forall a_1,a_2\in A:a_1\neq a_2\to f(a_1)\neq f(a_2)$$

לחלופין, אפשר לומר ש־f חח"ע, אם:

$$\forall a_1,a_2\in A:f(a_1)=f(a_2)\to a_1=a_2$$

כלומר, לתמונות שוות יש מקורות שווים. למשל, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

f לא חח"ע, למשל $\pi \neq 0$ אך: $f(0) = f(\pi)$. מצד שני $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$ היא חח"ע; אם $x_1 \neq x_2$, $x_1 < x_2$ מכיוון ש־g עולה, נקבל שגם: $e^{x_1} < e^{x_2}$, ובפרט: $g(x_1) \neq g(x_2)$.

*אם פונקציה עולה/יורדת אז היא חח"ע; מצד שני, אם פונקציה היא חח"ע זה לא אומר שהיא עולה או יורדת. למשל:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 3 + e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

2. נאמר ש־f היא על, אם לכל איבר בטווח יש מקור בתחום, כלומר:

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$$

במילים אחרות, f היא על אם הטווח שווה לתמונה, אם כל איבר מהטווח הוא תמונה של מישהו מהתחום. למשל, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = e^x$ לא על; למשל, ל־-1 אין מקור בתחום – לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש: $g(x) = -1$.

מצד שני, הפונקציה $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ היא כן על; לכל $b \in \mathbb{R}$, בטווח, יש מקור בתחום, $e^b \in (0, \infty)$: $h\left(e^b\right) = \ln e^b = b$.

נחזור להעתקות ליניאריות. אם T העתקה ליניארית, אפשר לבדוק האם T היא חח"ע/על באמצעות הגרעין והתמונה.

<u>משפט:</u>

יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to W$ העתקה ליניארית.

1. T חח"ע אם ורק אם $\ker T = \{0\}$.
2. T על אם ורק אם $\dim ImT = \dim W$.

הוכחה:

1. כיוון ראשון: נניח ש־T חח"ע, נוכיח ש: $\ker T = \{0\}$. נניח בשלילה ש: $\ker T \neq \{0\}$. לכן, קיים $v \in \ker T$ כך ש: $v \neq 0$.

לפי הגדרת הגרעין, $T(v) = 0$. מצד שני, T העתקה ליניארית ולכן: $T(0) = 0$. אם כן, $T(v) = T(0)$ למרות ש: $v \neq 0$, ולכן T לא חח"ע וסתירה.

כיוון שני: נניח ש־$\ker T = \{0\}$, נוכיח ש: T חח"ע. נניח בשלילה ש־T לא חח"ע. לכן, קיימים $v_1 \neq v_2$ כך ש: $T(v_1) = T(v_2)$. בפרט, $v_1 - v_2 \neq 0$, אבל:

$$T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = 0$$

ולפי הגדרת גרעין, נקבל ש: $v_1 - v_2 \in \ker T$, סתירה.

2. T על אם ורק אם התמונה שווה לטווח, כלומר: $ImT = W$.

כיוון ראשון: אם T על אז $ImT = W$ ואז גם: $\dim ImT = \dim W$.

כיוון שני: אם $\dim ImT = \dim W$, מכיוון ש: $ImT \leq W$ נקבל שגם: $ImT = W$ (במרחבים וקטוריים, הכלה+שוויון מימדים=שוויון מרחבים), ולכן T על המרחב.

תכלס, גם את 1 אפשר היה לנסח כך: T חח"ע אם ורק אם $\dim \ker T = 0$.

איזומורפיזם:

העתקה ליניארית נקראת איזומורפיזם, אם היא חח"ע ועל. אם $T : V \to W$ איזומורפיזם, נאמר ש־V, W איזומורפיים ונסמן: $V \cong W$. אם מרחבים הם איזומורפיים, מתקיים: $\dim V = \dim W$, למשל: $\mathbb{R}_2[x] \cong \mathbb{R}^3$, עם

האיזומורפיזם: $T\left(a,b,c\right)=ax^{2}+bx+c$.

יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\rightarrow W$ העתקה ליניארית. כמה טענות המקשרות בין חח"ע ועל לבין המימדים של התחום והטווח; כדי להוכיח את רובן צריך "לעבור" בגרעין ובתמונה ולהשתמש במשפט הדרגה: $\dim\ker T+\dim ImT=\dim V$.

1. אם T חח"ע, אז: $\dim V\leq\dim W$. לכן, אם $\dim V>\dim W$, T בהכרח לא חח"ע. למשל, האם קיימת $T:\mathbb{R}^{4}\rightarrow\mathbb{R}_{2}\left[x\right]$ חח"ע? לא.
2. אם T על, אז: $\dim V\geq\dim W$. לכן, אם $\dim V<\dim W$, T בהכרח לא על.
3. אם $\dim V=\dim W$, אז T חח"ע אם ורק אם T על.