

(88132) חשבון אינפניטיסמלי 1 | טענות ומשפטים חשובים למבחן

פרופ' צבאן | תשפ"ב

19 בינואר 2022

- יונתן סמידוברסקי -

מכיל רק חלק מהטענות והמשפטים ממיקוד 2021-2022

1) צפיפות \mathbb{Q} ב- \mathbb{R} : בין כל שני מספרים ממשיים יש מספר רציונאלי

הוכחה: יהיו $a < b \in \mathbb{R}$

צ"ל: קיים רציונאלי $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ כך $a < \frac{m}{n} < b$.

מתכונת ארכימדס קיים $\frac{1}{n} < b - a$ ולכן הקבוצה הבאה לא ריקה וכן חסומה מלעיל

$$m := \max \left\{ k \in \mathbb{Z} \mid \frac{k}{n} \leq a \right\} = \max \{ k \in \mathbb{Z} \mid k \leq na \}$$

כעת $m + 1 \notin \{ k \in \mathbb{Z} \mid k \leq na \}$ כי גדול מהמקסימלי ומתקיים $m + 1 > na$. כלומר, $a < \frac{m+1}{n}$. מצד שני $\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$ ולכן סיימנו.

2) התכנסות סדרה התכונות הבאות שקולות:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : |a_n - a| \leq \epsilon \quad (\text{א})$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon \quad (\text{ב})$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : |a_n - a| \leq c\epsilon \quad (\text{ג})$$

הוכחה:

א \Leftarrow ב: ניקח $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$. כעת מהנתון קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - a| \leq \epsilon' = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$

ב \Leftarrow א: מייד, קטן בפרט קטן שווה.

ג \Leftarrow א: מייד, לוקחים $c = 1$

ג ← א: נחלק למקרים

אם $c = 0$: אזי $0 \leq |a_n - a| \leq 0$ ואז $a_n = a$ ובפרט $a_n \rightarrow a$
אם $c \neq 0$: אזי ניקח $\epsilon' := \frac{\epsilon}{c}$ ואז מתקיים $\epsilon = c \cdot \epsilon' = c \cdot \frac{\epsilon}{c}$ ונכתוב $|a_n - a| \leq c \epsilon' = \epsilon$

(3) יחידות הגבול

תהי $a_n \rightarrow a$ וכן $a_n \rightarrow b$ אזי $a = b$

הוכחה:

נניח בשלילה $a \neq b$, נניח בלי הגבלת הכלליות $a > b$

ניקח $\epsilon := \frac{a-b}{3}$ מההגדרה מתקיים כי קיים N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $|a_n - a| < \epsilon$.

מצד שני, קיים N_2 כך שלכל $n \geq N_2$ מתקיים $|a_n - b| < \epsilon$.

נכתוב ניקח $N := \max\{N_1, N_2\}$ ויתקיים לכל $n \geq N$:

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b|$$

מאי שיוויון המשולש

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \epsilon + \epsilon = 2 \cdot \epsilon = 2 \cdot \frac{a-b}{3}$$

בסה"כ קיבלנו $a - b \leq \frac{2}{3}(a - b)$ ומהנתון $a > b$ נגזר לחלק את אי השיוויון ב $a - b$ ומקבלים $1 \leq \frac{2}{3}$ שזו כמובן סתירה.

(4) חשבון גבולות

(א) סכום: אם $a_n \rightarrow a$ וכן $b_n \rightarrow b$ אז $a_n + b_n \rightarrow a + b$

הוכחה:

יהי $\epsilon > 0$ נמצא N שממנו ואילך מתקיים $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \epsilon$

נתון כי קיים N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ אזי $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$

וכן קיים N_2 כך שלכל $n \geq N_2$ אזי $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$

ניקח את $N := \max\{N_1, N_2\}$ וממנו ואילך מתקיים שני התנאים ולכן:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(ב) מכפלה: אם $a_n \rightarrow a$ וכן $b_n \rightarrow b$ אז $a_n \cdot b_n \rightarrow ab$

הוכחה:

$$|a_n \cdot b_n - ab| \leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - ab| = |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|$$

נניח $b_n \leq c$ כי $b_n \rightarrow b$ כלשהו ואילך כל סדרה מתכנסת חסומה

$$|b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \leq c \cdot \frac{\epsilon}{2} + |a| \cdot \frac{\epsilon}{2} = \frac{c + |a|}{2} \cdot \epsilon$$

(ג) מנה: אם $a_n \rightarrow a \neq 0$ וכן $b_n \rightarrow b$ אז $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{b}{a}$

הוכחה:

מספיק להוכיח אם $a_n \rightarrow a \neq 0$ אז $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$ ואז נפעיל כפל עם b_n .

קל להוכיח כי אם $a_n \rightarrow a \neq 0$ אז $|a_n| > 0$ ונניח $|a_n| \geq \frac{|a|}{2}$ (מאי שיוויון המשולש) ואז יש N שממנו ואילך $|a_n| \geq \frac{|a|}{2}$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - a_n}{a \cdot a_n} \right| \leq \frac{|a - a_n|}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} \leq \frac{2}{|a|^2} \cdot |a - a_n| < \frac{2}{|a|^2} \cdot \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{|a|^2}$$

5) כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

הוכחה: תהי a_n מונוטונית וחסומה נוכיח עבור עולה, הכיוון השני דומה. נסמן $s := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
יהי $\epsilon > 0$ נמצא N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - s| \leq \epsilon$ שקול ללהוכיח $s - \epsilon \leq a_n \leq s + \epsilon$
ידוע כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq s < s + \epsilon$ מהגדרת החסם העליון. כעת ניקח N כך ש $s - \epsilon \leq a_N$ ואז הסדרה עולה ולכן
 $s - \epsilon \leq a_N \leq a_n \leq s + \epsilon$.

6) גבולות שומרים על אי שיויון חלש

אם $a \leq b$ אזי $a \leftarrow a_n \leq b_n \rightarrow b$
הוכחה: נניח בשילה $a > b$ וניקח $\epsilon < \frac{a-b}{2}$
קיים N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $|a_n - a| < \epsilon \iff a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$
מצד שני, קיים N_2 כך שלכל $n \geq N_2$ מתקיים $|b_n - b| < \epsilon \iff b - \epsilon < b_n < b + \epsilon$
[$b + \epsilon < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < a - \epsilon$]
לכן בסתירה. $b_n < b + \epsilon < a - \epsilon < a_n$

7) משפט הסנדוויץ'

אם $c \leftarrow a_n \leq c_n \leq b_n \rightarrow c$
הוכחה:
קיים N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $|a_n - c| \leq \epsilon \iff c - \epsilon \leq a_n \leq c + \epsilon$
מצד שני, קיים N_2 כך שלכל $n \geq N_2$ מתקיים $|b_n - c| \leq \epsilon \iff c - \epsilon \leq b_n \leq c + \epsilon$
לכן ניקח $N := \max\{N_1, N_2\}$ והחל ממנו ואילך
 $c - \epsilon \leq c_n \leq a_n \leq b_n < c + \epsilon$ ולכן $c_n \rightarrow c$.

8) לכל $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ התכונות הבאות שקולות:

(א) a הוא גבול חלקי של הסדרה (a_n)
(ב) לכל סביבה U של a , יש אינסוף ערכי n שעבורם $a_n \in U$
הוכחה:
 \Leftarrow **א:** תהי $a_{m_n} \rightarrow a$ ותהי U סביבה של a מהלמה יש N כך שלכל $n \geq N$ אז $a_{m_n} \in U$, $(m_1 < m_2 < \dots)$, יש כאן אינסוף מקמות בסדרה שאיברם שייך ל U
 \Leftarrow **ב:** $(a - 1, a + 1)$ הינה סביבה של a ומהנתון יש m_1 כך ש $a_{m_1} \in (a - 1, a + 1)$
 $a_{m_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ הינה סביבה של a ומהנתון יש m_2 כך ש $a_{m_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$
.

$a_{m_n} \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ הינה סביבה של a ומהנתון יש m_n כך ש $a_{m_n} \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ וכן $m_{n+1} \in \{k | a_k \in (a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1})\}$ וכתוצאה מכך $a - \frac{1}{n} \leq a_{m_n} \leq a + \frac{1}{n}$ סיימנו.

9) לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית

לצורך ההוכחה: הגדרה: פסגה של הסדרה a_n אם לכל $m \geq k$ מתקיים $a_m \leq a_k$
הוכחה:

אם יש בסדרה אינסוף פסגות a_{m_1}, a_{m_2}, \dots כך ש $m_1 < m_2 < \dots$ אז סיימנו כי קיבלתי ת"ס מונוטונית יורדת. אחרת, יש כמות סופית של פסגות ובפרט יש N כך שלכל $n \geq N$ אין פסגות. ניקח $N \leq m_1$ וכן a_{m_1} אינו פסגה ולכן קיים $m_2 > m_1$ כך ש $a_{m_2} > a_{m_1}$ וכן a_{m_2} אינו פסגה...
 לכן קיימת סדרה עולה ממש (a_{m_n}) המורכבת מהאיברים הללו.

10) משפט בולצאנו-ויירשטראסט

לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת
הוכחה:

מהלמה שהוכחנו קיימת לה ת"ס מונוטונית אשר חסומה גם היא ולכן סה"כ תת הסדרה מתכנסת.

11) קריטריון קושי להתכנסות סדרות

הסדרה (a_n) מתכנסת \iff לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שלכל $n, m \geq N$ מתקיים $|a_n - a_m| \leq \epsilon$
הוכחה:

(\Leftarrow) נניח $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$. יהי נתון $\epsilon > 0$ אזי קיים N כך שממנו ואילך לכל $n, m \geq N$ מתקיים: $|a_n - a|, |a_m - a| < \epsilon$
 ומאי שיוויון המשולש $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \epsilon + \epsilon = 2 \cdot \epsilon$
 (\Rightarrow) - הסדרה (a_n) חסומה, נוכיח:

ניקח $\epsilon = 1$ ו- N שממנו ואילך מתקיים תנאי קושי, כלומר לכל $n, m \geq N$ מתקיים: $|a_n - a_m| \leq 1$. כעת בפרט ניקח $n, N \geq N$ ומתקיים $|a_n - a_N| \leq 1$ כלומר לכל $n \geq N$: $-1 \leq a_n - a_N \leq 1$ זנב הסדרה חסום ולכן כולה.
 מבולצאנו ויירשטראסט קיימת ת"ס $a_{m_n} \rightarrow a$. יהי $\epsilon < 0$:

קיים N_1 שממנו ואילך $|a_{m_n} - a_n| \leq \epsilon$ מהנתון.

קיים N_2 שממנו ואילך $|a_{m_n} - a| \leq \epsilon$ מהגדרת התכנסות.

וניקח $N := \max\{N_1, N_2\}$ כך שממנו ואילך שני התנאים מתקיימים ולכן מאי שיוויון המשולש $|a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| \leq \epsilon + \epsilon = 2 \cdot \epsilon$.

12) הסדרה (a_n) מתכנסת במונן הרחב $\iff \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

הוכחה:

(\Leftarrow) אם סדרה מתכנסת אז יש לה גבול חלקי יחיד וממילא זהו כבר הגבול העליון והתחתון שלה

(\Rightarrow) נסמן $a = \liminf_{x \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{x \rightarrow \infty} a_n$ כאשר $a \in \mathbb{R}$ צ"ל $a_n \rightarrow a$. תהי $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ סביבה של a .

נניח בשלילה שהקבוצה $I := \{n | a_n \leq a - \epsilon\} \cup \{n | a_n \geq a + \epsilon\}$, נניח למשל שאחת הקבוצות אינסופית, למשל $a_n \leq a - \epsilon$ עבור אינסוף ערכי n .

נמספר $I_0 := \{m_1, m_2, \dots\}$ נקבל ת"ס $b_n := a_{m_n} \leq a - \epsilon$ ומתקיים $\liminf b_n \leq a - \epsilon$. אבל ניקח ת"ס של b_n המתכנסת לגבול התחתון של $-b_n$ נקרא לה b_{k_n}

ולכן b_{k_n} ת"ס של a_n וקייבלנו גבול חלקי $a > a - \epsilon \geq$ בסתירה.

13) הטור ההרמוני מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

הוכחה:

בעזרת קריטריון קושי לסדרת הסכומים החלקיים. נראה שהיא אינה מקיימת את קריטריון קושי:

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

(בעזרת מבחן העיבוי ניתן להוכיח $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha \geq 1$)

14) מבחני השוואה

משפט: (מבחן השוואה) אם $0 \leq a_n \leq b_n$ אז $\sum a_n \leq \sum b_n$

הוכחה:

$$a_1 + \dots + a_k \leq b_1 + \dots + b_k \quad k \rightarrow \infty$$

$$\sum a_n \leq \sum b_n \quad (\text{גבולות שומרים על אי שוויון חלש}).$$

משפט: (מבחן השוואה הגבולי) עבור טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$ כך ש $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow c$ ($0 < c < \infty$) אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הוכחה:

ניקח $\epsilon < 0$ כך ש $c - \epsilon > 0$ ומהנתון לבסוף $c + \epsilon \geq \frac{a_n}{b_n} \leq c - \epsilon < 0$ $\iff 0 < (c - \epsilon) \cdot b_n \leq a_n \leq (c + \epsilon) \cdot b_n$ ומלמה (מסקנה ממבחן השוואה), הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

15 מבחן השורש

למה $\limsup x_n < 1 \iff$ קיים $q < 1$ כך שלבסוף $x_n \leq q$

הוכחה:

\Rightarrow תהי (x_{n_m}) ת"ס מתכנסת במובן הרחב. נאמר $x_{m_n} \rightarrow a$ אבל לבסוף $x_{m_n} \leq q$ וגבולות שומרים על אי שוויון חלש ולכן $a \leq q < 1$.

\Leftarrow אם $a = -\infty$: ניקח $q = 0$ ואז נניח בשלילה $x_n > 0$ לאינסוף ערכי n . תהי (b_n) ת"ס של (x_n) המורכבת מכל האיברים הללו (הגדולים מאפס), וניקח (c_n) ת"ס שלה-

כעת מתקיים $c_n \rightarrow c$ וכן $0 \leq c \leq \limsup x_n \leq -\infty$ בסתירה.

אם $-\infty < \limsup x_n = a < 1$: נקבע $\epsilon > 0$ כך ש $1 - \epsilon > a + \epsilon =: q$. נראה כי לבסוף $x_n \leq q$: נב"ש קיימים אינסוף $x_n > q$ וניקח ת"ס מתכנסת $c_n \rightarrow c$ ואז $q < c_n \rightarrow c$ ואז $a - \epsilon = q \leq c \leq \limsup x_n = a$.

בסתירה כמובן.

משפט (מבחן השורש) עבור טור חיובי $\sum a_n$

(א) אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ אז $\sum a_n < \infty$

(ב) אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ אז $\sum a_n = \infty$

הוכחה:

(א) מהנתון קיים $q < 1$ כך שלבסוף $\sqrt[n]{a_n} < q$ כלומר $a_n < q^n$ ולפי מבחן ההשוואה עם הטור ההנדסי סיימנו.

(ב) מהנתון $\sqrt[n]{a_n} > 1$ לאינסוף ערכי n , ולכן $a_n > 1$ וכן $\sum a_n = \infty$.

16 מבחן המנה

אם $a_n > 0$ לכל n

(א) אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז הטור מתכנס $\sum a_n < \infty$

(ב) אם לבסוף $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אז הטור מתבדר.

הוכחה:

(א) יש $q < 1$ כך שלבסוף $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ כלומר $a_{n+1} < qa_n$. נתבונן בזנב של הטור ונסמנו $\sum b_n$ המקיים $b_{n+1} < qb_n < \dots < q^{n-1} \cdot b_1$

(נסתכל על הטור ההנדסי שכן $0 < q < 1$)

-מ⁶

$$\sum b_n \leq \sum q^{n-1} b_1 < \infty$$

לפי מבחן ההשוואה, וכיוון שזה זנב גם $\sum a_n < \infty$.

(ב) יש N שממנו ואילך $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אז $1 \leq a_N \leq a_{N+1} \leq \dots$ לכן a_n לא שואף לאפס וכן $\sum a_n = \infty$.

17 חוק הקיבוץ

(א) לטור כללי- הכנסת סוכריים לטור מתכנס במובן הרחב לא משנה את סכומו

(ב) לטור חיובי- גם מחיקת סוגריים לא משנה את סכומו

הוכחה:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{m_i} + \dots + a_{m_{i+1}-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 1 = m_1 < m_2 < \dots$$

יהיו S_k סדרת הסכומים החלקיים של $\sum a_n$ ו- t_k סדרת הסכומים החלקיים של $\sum b_i$

לכל k מתקיים: $\sum a_n \rightarrow t_k = (a_{m_1} + \dots + a_{m_2-1}) + (a_{m_k} + \dots + a_{m_{k+1}-1}) = a_1 + \dots + a_{m_{k+1}-1}$ (לפי קיבוץ בסכום סופי).

(ב) הטורים חיוביים ולכן מתכנסים במובן הרחב, הוכחנו את החלק הראשון. כמו כן, נסתכל על הסדרה $t_k = S_{m_{k+1}-1}$

ונשאיף $\rightarrow \infty$ ולכן $\sum b_i = \sum a_n$.

18 מבחן העיבוי

אם הסדרה (a_n) חיובית ויורדת אז הטורים $\sum a_n$, $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הוכחה:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n a_{2^n} = a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots = \sum 2^n a_{2^n}$$

ממבחן ההשוואה

אם $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$ אז גם הטור $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\sum a_n < \infty$ אז גם הטור $\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס, וכפל בקבוע לא משנה התכנסותו של טור ולכן $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$. (18. מבחן העיבוי

אם הסדרה (a_n) חיובית ויורדת אז הטורים $\sum a_n$, $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הוכחה:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n a_{2^n} = a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots = \sum 2^n a_{2^n}$$

ממבחן ההשוואה

אם $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$ אז גם הטור $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\sum a_n < \infty$ אז גם הטור $\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס, וכפל בקבוע לא משנה התכנסותו של טור ולכן $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$.

19 משפט לייבניץ

אם הסדרה (a_n) חיובית ויורדת לאפס אז $a_n \searrow 0$

(א) הטור $\sum (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס

(ב) שאריות הטור מקיימות $|r_k| \leq a_{k+1}$ (כלומר, $S_k - a_{k+1} \leq S \leq S_k + a_{k+1}$)

הוכחה:

(א) לכל k : $S_{2k} = (a_1 - a_2) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k})$ זהו סכום סופי, והמחברים בו גדולים מאפס (בגלל שיוורדת),

כמו כן $S_{2(k+1)} = S_{2k} + (a_{2k+1} + a_{2k+2})$ ומירידת הסדרה, המחובר חיובי ולכן סדרת הסכומים החלקיים (עד מס' זוגי) סדרה

עולה.

כל אחד מהמחוסרים מ- a_1 חיובי ולכן סה"כ גם חסומה. $S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$

סה"כ קיבלנו $S_{2k} = S_{2k-1} + a_{2k}$ מתכנסת אבל $a_{k+1} \rightarrow 0$ ולכן הסכומים שואפים לאותו דבר וסיימנו.
 (ב) יהי k נתון, נסתכל על הזנב $r_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ עבור k אי-זוגי, נקבל מקרה פרטי של מה שהוכחנו.
 כי $a_{k+1} \geq r_{k+1} = a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} \dots$ (האיבר הראשון של הטור אשר חוסם אותו).
 עבור k אי זוגי $r_k = -(a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - \dots) \geq a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - \dots$
 לכן $0 \leq r_k \leq a_{k+1}$. לסיכום, סיימנו $|r_k| \leq a_{k+1}$ לכל k $S = S_k + r_k$ ומקבלים $S_k - a_{k+1} \leq S \leq S_k + a_{k+1}$.

20) טור מתכנס בהחלט, מתכנס

הוכחה:

נתון $\sum |a_n| < \infty$ נוכיח התכנסות $\sum a_n$ בעזרת קריטריון קושי.
 יהי $\epsilon > 0$ מקושי עבור $\sum |a_n|$, יש N שממנו ואילך

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n| \leq \epsilon$$

לכן $\sum a_n$ מקיים את קריטריון קושי.

21) מבחן דיריכלה

משפט (מבחן דיריכלה) אם $a_n \rightarrow 0$ מונוטונית והטור $\sum b_n$ חסום אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה:

מספיק להוכיח כאשר $a_n \searrow 0$ ונראה התקיימות תנאי קושי. יהיו $m < n$

$$|b_{m+1}a_{m+1} + \dots + b_n a_n| = |S_m(-a_{m+1}) + S_{m+1}(a_{m+1} - a_{m+2}) + \dots + S_{n-1}(-a_n) + S_n a_n| \leq |S_m|$$

$$|S_m| |(-a_{m+1})| + |S_{m+1}| |(a_{m+1} - a_{m+2})| + \dots + |S_{n-1}| |(-a_n)| + |S_n a_n| \leq c a_{m+1} + c(a_{m+1} - a_{m+2}) + \dots + c(a_{n-1} - a_n) + c a_n = 2c a_{m+1}$$

יהי $\epsilon > 0$ וידוע $a_n \rightarrow 0$ לכן קיים N שממנו ואילך $a_n \leq \epsilon$ אז לכל $N \leq m \leq n$ ומהחשבון הנ"ל מתקיים

$$|b_{m+1}a_{m+1} + \dots + b_n a_n| \leq 2c a_{m+1} \leq 2c \epsilon$$

22 מבחן אבל

משפט (מבחן אבל) אם a_n מונוטונית וחסומה והטור $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה:

(a_n) מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת, נסמן $a_n \rightarrow a$ אזי הסדרה $(a_n - a) \rightarrow 0$ ומונוטונית. (b_n) מתכנס ובפרט חסום ומדיריכלה מתקיים $\sum b_n(a_n - a)$ מתכנס, וכן מתקיים $\sum b_n$ מתכנס. לכן גם הטור $\sum b_n a_n - ab_n + ab_n < \infty$ מתכנס, וסיימנו.

23 חוק החילוף

למה שינוי סדר האיברים בטור חיובי אינה משנה את סכומו (לכל תמורה $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$)

הוכחה:

יהי נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, נוכיח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$:

נסמן $S_k^\sigma = a_{\sigma(1)} + \dots + a_{\sigma(k)}$, יהי $k \in \mathbb{N}$ וניקח $l \geq \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ ומתקיים $S_k^\sigma \leq S_l$

נשאיף $l \rightarrow \infty$ לקבלת $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. זה מספיק משום שמפעילים את הטענה על $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ וזה מתקיים בפרט עבור התמורה ההפוכה σ^{-1} .

וסה"כ הם שווים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

משפט (חוק החילוף) שינוי סדר האיברים בטור מתכנס בהחלט לא משנה את סכומו.

הוכחה:

ראינו $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ בפרט לכל הטור $\sum a_{\sigma(n)} = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)}$.

שני הטורים הללו חיוביים ולכן $\sum p_{\sigma(n)} = \sum p_n$, $\sum q_{\sigma(n)} = \sum q_n$, ולכן הם גם מתכנסים כי הטור מתכנס בהחלט. =

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)} = \sum a_{\sigma(n)}$$

24 חוק החילוף

למה שינוי סדר האיברים בטור חיובי אינה משנה את סכומו (לכל תמורה $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$)

הוכחה:

יהי נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, נוכיח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$:

נסמן $S_k^\sigma = a_{\sigma(1)} + \dots + a_{\sigma(k)}$, יהי $k \in \mathbb{N}$ וניקח $l \geq \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ ומתקיים $S_k^\sigma \leq S_l$

נשאיף $l \rightarrow \infty$ לקבלת $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. זה מספיק משום שמפעילים את הטענה על $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ וזה מתקיים בפרט עבור התמורה ההפוכה σ^{-1} .

וסה"כ הם שווים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

משפט (חוק החילוף) שינוי סדר האיברים בטור מתכנס בהחלט לא משנה את סכומו.

הוכחה:

ראינו $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ בפרט לכל הטור $\sum a_{\sigma(n)} = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)}$.
 שני הטורים הללו חיוביים ולכן $\sum p_{\sigma(n)} = \sum p_n$, $\sum q_{\sigma(n)} = \sum q_n$, ולכן הם גם מתכנסים כי הטור מתכנס בהחלט. =

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)} = \sum a_{\sigma(n)}$$

25 שינוי סדר האיברים בטור מתכנס בתנאי

למה אם בטור מתכנס עם סוגריים, בכל סוגריים המחוברים מאותו סימן אז הכנסת סוגריים לא תשנה את סכומו.

הוכחה:

צ"ל: $\sum_{i=1}^{\infty} (a_{m_i} + \dots + a_{m_{i+1}-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} (a_{m_i} + \dots + a_{m_{i+1}-1})$
 לכל k יהי $i = i(k)$ כך ש $m_i \leq k \leq m_{i+1}$ אז

$$|(b_1 + \dots + b_i) - (a_1 + \dots + a_i)| = |a_{k+1} + \dots + a_{m_{i+1}-1}| \leq |b_i| \rightarrow 0$$

(כאשר $k \rightarrow \infty$ גם $i \rightarrow \infty$)

כעת, $\sum b_i - \sum a_n \leftarrow (b_1 + \dots + b_i) - (a_1 + \dots + a_i) \rightarrow 0$,
 ומתקיים $\sum b_i < \infty$ לכן גם $\sum a_n < \infty$ ושווה לו וסה"כ

$$\sum a_n = \sum b_i$$

26 לשון $\epsilon - \delta$ שקול להינה

(א) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (כלומר לכל סדרה ב $\text{dom}(f)$ $a \neq a_n \rightarrow a$ מתקיים $f(a_n) \rightarrow b$)

(ב) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall 0 < |x-a| < \delta : |f(x) - b| < \epsilon$

הוכחה

א \Leftarrow ב: תהי $a \neq x_n \rightarrow a$ ל"צ $f(x_n) \rightarrow b$. יהי $\epsilon > 0$ והמנתון קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - b| < \epsilon$.

מתקיים כי $0 < x_n - a \rightarrow 0$ לכן לבסוף $|f(x_n) - b| < \epsilon$ כלומר $f(x_n) \rightarrow b$.

א \Leftarrow ב: נניח בשלילה $|f(x) - b| \geq \epsilon$ $\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists 0 < |x-a| < \delta : |f(x) - b| \geq \epsilon$. יהי $n \in \mathbb{N}$ וניקח $\delta := \frac{1}{n}$ וכך שמתקיים $0 < |x_n - a| < \delta$ ועדיין $|f(x_n) - b| \geq \epsilon$.

קיבלנו סדרה $x_n \rightarrow a \neq a$ כך ש $|f(x_n) - b| \geq \epsilon$ כלומר $f(x_n)$ לא שואף ל b בסתירה.

27) ניסוחים שקולים לרציפות פונקציות

(א) רציפה בנק' ככלומר: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(ב) לכל סדרה $x_n \rightarrow a$ מתקיים $f(x_n) \rightarrow f(a)$

(ג) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \epsilon$

(ד) $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$

הוכחה

א \Leftarrow ב מידי

א \Leftarrow ב תהי $x_n \rightarrow a$,

אם יש כמות סופית של שווים ושוניים מ a , מסתכלים על הזנב והסדרה שואפת ל $f(a)$ אחרת, נפצל לשתי ת"ס, אלה ששוים ל a ושוניים מ a . ושתיהן מתכנסות לאותו גבול ומכסות את הסדרה.

א \Leftarrow ג מידי

א \Leftarrow ג נותר לבדוק את המקרה $|x - a| = 0$ כלומר $x = a$ אבל אז $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$

א \Leftarrow ד תהי $x_n \rightarrow a \neq a$ צ"ל $f(x_n) \rightarrow f(a)$. נסמן $h_n := x_n - a \rightarrow 0$ ומהנתון $f(a + h_n) \rightarrow f(a)$

א \Leftarrow ד תהי $h_n \rightarrow 0 \neq h_n$ ונסמן $x_n := h_n + a$ וכעת $f(a + h_n) = f(x_n) \rightarrow f(a)$

28) משפט ערך הביניים

אם f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) ו $f(a) < f(b)$ אז לכל מס' ממשי $f(a) < d < f(b)$ יש נק' $a < c < b$ כך $f(c) = d$.

הוכחה

ראשית, אם קיים $s := \sup A$ אז יש $a_n \in A$ וגם $a_n \rightarrow s$.

יהי $c := \sup\{x \in [a, b] | f(x) \leq d\}$ (קב' זו חסומה ע"י b וכן $f(a) < d$ ולכן שייכת לקבוצה, אינה ריקה).

תהי $c \geq x_n \rightarrow c$ מרציפות מתקיים $c \leftarrow f(x_n) \leq d$.

נניח בשלילה $f(c) < d$, $f(c) < f(b)$, לכן $c \neq b$ וכן $c < b$,

תהי $c^+ > t_n \rightarrow b$ אזי $f(t_n) \rightarrow f(c) < d$ ולכן לבסוף $f(t_n) < d$

למרות ש $c < t_n$ אשר הוא \sup . בסתירה. לכן $f(c) = d$.

29) משפט ויירשטראס

פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום גלובליים שם.

הוכחה

תהי f רציפה $[a, b]$, חסומה בקטע

נב"ש $\{f(x) | x \in [a, b]\}$ אינה חסומה מלעיל. לכל n קיים $a \leq x_n \leq b$ כך ש $f(x_n) > n$. אבל $\{x_n\}$ חסומה לכן לפי בולצאנו וירשטראס יש ת"ס מתכנסת $x_0 \rightarrow x_{n_k}$ כך ש $a \leq x_0 \leq b$. רציפה ולכן $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$.

זו סתירה כי כת"ס גם $\infty \rightarrow f(x_{n_k})$.

הוכחה נראה שקיים מקסימום

f חסומה ולכן $s := \sup\{f(x) | a \leq x \leq b\}$ קיים, ניקח סדרה מהקב"ש $s \geq f(x_n) \rightarrow s$.
 $a \leq x_n \leq b$ לכל n לכן יש לה ת"ס מתכנסת $c \rightarrow t_n$, $f(c) = s$ וזוהי נק' מקסימום גלובלית. באותו אופן, מינימום...

30 רציפות במידה שווה

f רמב"ש בקב"ש $X \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X: |x_1 - x_2| \leq \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

הוכחה

\Leftarrow נב"ש $\epsilon \implies \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X: |x_1 - x_2| \leq \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon$ לכל n עבור $\delta := \frac{1}{n}$ יש $a_n, b_n \in X$ אם $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$ ועדיין $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon$ סתירה
 (כי לפי סנדוויץ' $|a_n - b_n| \rightarrow 0 \implies |f(a_n) - f(b_n)| \rightarrow 0$ לא שואף לאפס.)
 \Rightarrow יהיו $a_n, b_n \in X$ כך ש $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ נוכיח $|f(a_n) - f(b_n)| \leq \epsilon$
 יהי $\epsilon > 0$ ניקח $\delta > 0$ כנתון ולבסוף $|a_n - b_n| < \delta$ ולכן $|f(a_n) - f(b_n)| < \epsilon$

31 משפט קנטור

פונקציה רציפה בקטע סגור, רציפה בו במ"ש

הוכחה

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ נב"ש שאינה רציפה שם. כלומר יש בקטע סדרות a_n, b_n כך ש $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ אבל $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon > 0$ ניקח $\epsilon > 0$ כך ש $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon$ לאינסוף ערכי n ונמספרם. $m_1 < m_2 < \dots$
 אז $|f(a_{m_n}) - f(b_{m_n})| \geq \epsilon$ לכל n למרות ש $|a_{m_n} - b_{m_n}| \rightarrow 0$.
 תהי c_{k_n} ת"ס מתכנסת של a_{m_n} , וכן d_{k_n} של b_{m_n} .
 f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ לכן $f(c_{k_n}) \rightarrow f(c)$, ולכן $|c_{k_n} - d_{k_n}| \rightarrow 0$ ולכן $d_{k_n} \rightarrow f(c)$.
 מקבלים $0 \rightarrow |f(c_{k_n}) - f(d_{k_n})| \leq \epsilon$ בסתירה.

32 משפט פרמה

אם c נק' מקסימום או מינימום של f בקטע פתוח והנגזרת $f'(c)$ קיימת- אזי $f'(c) = 0$

הוכחה

תהי c נק' מקסימום של f בקטע פתוח $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

כש $h \rightarrow 0^+$ מתקיים $f'(c) \geq 0$
 כש $h \rightarrow 0^-$ מתקיים $f'(c) \leq 0$
 ולכן $f'(c) = 0$. עבור מינמום דומה...

33 משפט רול

אם f רציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) וכן $f(a) = f(b)$ אז יש $a < c < b$ כך ש $f'(c) = 0$

הוכחה

f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע, אם הם שווים- היא קבועה. אחרת, לפחות אחד מהם בתוך הקטע הפתוח.

34 משפט הערך הממוצע (לגרנז')

אם f רציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) וכן $f(a) = f(b)$ אז יש $a < c < b$ כך ש $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

הוכחה

נגדיר $l(x) := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$

ואז $h(x) := f(x) - l(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$ והיא מקיימת את תנאי משפט רול, לכן קיים $a < c < b$ כך ש $h'(c) = 0$. כלומר $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ ולכן סיימנו.

35 משפט הערך הממוצע המוכלל (קושי)

אם f, g רציפות ב $[a, b]$ וגזירות ב (a, b) וכן $g(x) \neq 0$ אז יש $a < c < b$ כך ש $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

הוכחה

$g(b) \neq g(a)$. ניקח $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$ לפי רול קיים c כך ש $h'(c) = 0$ כלומר $0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g'(c))$ וסיימנו.