

**אלגברה לינארית להנדסה בר-אילן**  
**מועד ב' התשע"ג**

ד"ר מיטל אליהו רובינסון.  
 מתרגלים : אחיה בראון, גילי גולן, גיא לנדסמן.

זמן הבחינה : 3 שעות. הקדישו 30 דק' (לכל היותר!) לחלק הראשון ותכננו את חלוקת הזמן.  
 מספיקות 40 דק לכל אחת מהשאלות האחרות!  
 מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד.  
 ניתן לצבור לכל היותר 110 נקודות בבחינה אך הציון המרבי הוא 100.

הערה: כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

**חלק א'**

ענו על אחת מהשאלות הבאות : (20 נק')

1. תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  סימטרית. אזי  $A$  ניתנת ללכסון אורתוגונאלי.
2. נסחו והוכיחו את משפט הדרגה להעתקות לינאריות (בקשר לגרעין ותמונה).

**חלק ב' - פתרו 2 שאלות מתוך שאלות 3-5 (כל שאלה 30 נק')**

3. ע"ע:

א. תהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & -6 \\ 0 & 48 & -17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  מצאו  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  כך ש  $B^3 = A$

(15 נק')

- ב. תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  לכסינה. הוכיחו כי גם  $A^k$  לכסינה עבור  $1 \leq k \leq n$  שלם כלשהו. האם הכיוון ההפוך נכון? (כלומר בהינתן ש  $A^k$  לכסינה אז האם גם  $A$  לכסינה?) הוכיחו/הפריכו! (15 נק')

4. דטרמיננטות:

א.  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \dots & 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \alpha & \alpha \\ \vdots & n-2 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \alpha & \dots & \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . חשבו את  $|A|$ . (15 נק')

- ב. תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  הפיכה. הוכיחו :  $(adj A)^T = adj(A^T)$  (15 נק')

5. העתקות לינאריות :

- א. מצא וגרעין ותמונה להע"ל  $T : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $T(A) = \text{tr}A$  (8 נק')
- ב. יהי  $V$  מ"ו מעל  $F$  .  $T : V \rightarrow V$  הע"ל הוכיחו ש  $\ker T = \ker T^2$  אם"ם  $\text{Im} T = \text{Im} T^2$  (12 נק')
- ג. קבעו האם קיימת הע"ל עם התכונה המתוארת. אם אין – הוכיחו. אם יש – מצאו אחת כזו וכתבו אותה במפורש :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0 \right\} \text{ על } \mathbb{R}_2[x] \text{ את שמעבירה את } T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

(10 נק')

### חלק ג' : שאלה 6 – חובה!!!

6. תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  . הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים : (אין חובה דווקא לפי הסדר הזה, אפשר להוכיח לדוג' :  $\leftarrow \text{ג} \leftarrow \text{ו} \leftarrow \text{ב} \dots$  העיקר שתגיעו להתחלה.)

א.  $A$  אינה הפיכה.

ב. קיים  $b \in \mathbb{R}^n$  כך שלמע'  $Ax = b$  אין פתרון.

ג. למע' ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון ל"ט.

ד. עמודות  $A$  ת"ל.

ה. שורות  $A$  ת"ל.

ו.  $r(A) < n$

(כל מעבר = 5 נק')

2הצלחה!