27/08/19

88-235 אנליזת פורייה – פתרון מועד ב'

מרצה: ד"ר ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 28 נק' ענו על כל השאלות כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. יהי $a\in\mathbb{R}$ עבורו $0<a<\pi$ ותהי הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$.

א. הוכיחו כי טור הפוריה של f הינו $\frac{a}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(na)}{\pi n}\cos(nx)$.

ראשית נשים לב כי מדובר בפונקציה זוגית.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}dx=\frac{2a}{\pi}$$

ואכן $\frac{a_0}{2}=\frac{a}{\pi}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi n}[\sin(nx)]_0^a=\frac{2\sin(na)}{\pi n}$$

בדיוק כמו שרצינו

ב. חשבו את הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\sin(na)}{\pi n}$

הפונקציה וודאי מקיימת את תנאי משפט דיריכלה (במבחן תפרטו יותר)

ההמשך המחזורי של f שואף לאפס משני צידי π ולכן

$$0=\frac{a}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(na)}{\pi n}\cos(n\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(na)}{\pi n}\cos(n\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\sin(na)}{\pi n}=-\frac{a}{\pi}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(na)\cos(na)}{\pi n}$.

כאשר נציב a נקבל את ממוצע הגבולות הח"צ כלומר נקבל חצי

$$\frac{1}{2}-\frac{a}{\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(na)\cos(na)}{\pi n}$$

2. העזרו בטור מהשאלה הראשונה וחשבו את הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}$.

נציב $a=1$ בפונקציה מהשאלה הראשונה. הפונקציה רציפה באיזור אפס נציב אותו ונקבל

$$1=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(n)}{\pi n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2}$.

נשתמש בשיוויון פרסבל

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}1dx=\frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin^2(n)}{\pi^2n^2}$$

$$\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin^2(n)}{\pi^2n^2}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2}$$

3. תהי f פונקציה בעלת נגזרת f' רציפה.

נסמן את מקדמי טור הסינוסים של f ב $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$

א. הביעו את מקדמי טור הקוסינוסים של f' באמצעות b_n ו f.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f'(x)\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}[f(x)\cos(nx)]_0^{\pi}+\frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}[f(\pi)(-1)^n-f(0)]+nb_n$$

ב. הביעו את $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_{2n-1}=b_1-b_3+b_5-\dots$ באמצעות f .

ראשית, הפונקציה רציפה ולכן ההמשך האי זוגי שלה רציף למקוטעין וכנ"ל לגבי הנגזרת.

לכן בקטע $(0,\pi)$ טור הסינוסים מתכנס אל הפונקציה.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)=b_1-b_3+b_5-\cdots$$

.4

א. (14 נק') חשבו את התמרת הפורייה של $f(x)=e^{-|x|}$.

מההרצאה:

$$\mathcal{F}[f](s)=\frac{1}{\pi(1+s^2)}$$

ב. (10 נק') הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi s}}{1+s^2}ds=\frac{\pi}{e^{\pi}}$.

ההתמרה $F\in G$ ורציפה וכמו כן f רציפה ובעלת נגזרת רציפה (במבחן לבדוק ולפרט יותר).

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(s)e^{isx}ds=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}}{\pi(1+s^2)}ds$$

נציב $x=\pi$

$$\pi e^{-|\pi|}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is\pi}}{1+s^2}ds$$

ג. (4 נק') חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi x)}{1+x^2}dx$.

כיוון שההתמרה זוגית

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is\pi}}{1+s^2}ds=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi s)+i\sin(\pi s)}{1+s^2}ds=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi s)}{1+s^2}ds=\frac{\pi}{e^{-\pi}}$$