חוברת הקורס: http://u.math.biu.ac.il/~vishne/courses/88212/88212LectureNotes.pdf

פרק 1 - חוגים ואידיאלים

1. מבוא

הגדרה

חוג הוא מבנה אלגברי $(R;+,*;0,1)$ כאשר

- R קבוצה
- $+,*$ פעולות בינריות
- $0,1\in R$ קבועים

כך ש:

- $(R;+;0)$ חבורה אבלית(אסוציאטיבית, 0 נייטרלי, יש נגדי, חילופי)
- $(R;*;1)$ מונויד(אסוציאטיבי, 1 נייטרלי)
- הכפל דיסטריביוטיבי ביחס לחיבור: $\begin{array}{l} a*(b+c)=a*b+a*c \\ (a+b)*c=a*c+b*c \end{array}$

הגדרה

מבנה אלגברי $(R;+,*;0)$ כך ש

- $(R;+;0)$ חבורה אבלית
- $(R;*)$ חבורה למחצה(אסוציאטיבית)
- מתקיימת דיסטריביוטיביות

נקרא חוג-בלי-יחידה

הגדרות

יהי R חוג בלי יחידה.

1. איבר $e\in R$ המקיים $\forall_x xe=x$ נקרא <u>יחידה מימין</u>
2. איבר e המקיים $\forall_x ex=x$ נקרא <u>יחידה משמאל</u>

טענה

אם e יחידה מימין וe' יחידה משמאל, אזי $e=e'$.

הוכחה

$$e=e'e=e'$$

הגדרה

3. אם $e\in R$ הוא יחידה מימין ומשמאל הוא נקרא איבר יחידה.

הערה אם יש בחוג בלי יחידה R איבר יחידה, R נעשה חוג.

מסקנה

היחידה ־ יחידה: אם יש בR איבר יחידה, אז הוא יחיד.

הערה

$1\neq0$. אחרת, לכל x מתקיים $x=x\cdot1=x\cdot0\overset{!}{=}0$. נוכיח $x\cdot0=0$:

$$\cancel{x\cdot0}=x\left(0+0\right)=\cancel{x\cdot0}+x\cdot0$$

במקרה הזה, R הוא "חוג האפס" $R=\{0\}$(זה לא באמת חוג).

הערה

שדה = חוג + הכפל קומוטטיבי + כל איבר$\neq$0 הוא הפיך.

הגדרות

יהי R חוג. איבר x הוא

- הפיך מימין אם $\exists_y xy=1$
- הפיך משמאל אם $\exists_y yx=1$
- הפיך אם $\exists_y xy=yx=1$

טענה

x הפיך $\Leftrightarrow$ x הפיך מימין ומשמאל

הוכחה

$\Leftarrow$ טריוויאלי.

$\Rightarrow$ נניח שx הפיך מימין ומשמאל. לכן קיים y כך ש$xy=1$, וקיים y' כך ש$y'x=1$

$$y'=y'1=y'\left(xy\right)=\left(y'x\right)y=1y=y$$

$\blacksquare$

דוגמאות

- 0 תמיד לא הפיך
- 1 תמיד הפיך

הגדרות

- חוג שבו הכפל קומוטטיבי נקרא חוג קומוטטיבי.
- חוג שבו כל איבר$\neq 0$ הפיך נקרא חוג עם חילוק.
- חוג קומוטטיבי עם חילוק נקרא שדה.

דוגמאות

- $\mathbb{Z}$ - קומוטטיבי, לא שדה.
- $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ - שדות.
- $M_2\left(\mathbb{R}\right)$ - חוג לא קומוטטיבי, לא חוג עם חילוק(איבר הפיך מימין$\Leftrightarrow$הוא הפיך משמאל).
- $R=\left\{\begin{pmatrix}* & *\\0 & 0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\0 & 0\end{pmatrix}\middle|a,b\in\mathbb{R}\right\}$ חוג בלי יחידה.

  נחפש בR את כל היחידות מימין. נניח ש$e\in R=\begin{pmatrix}a & b\\0 & 0\end{pmatrix}$ יחידה מימין:

$$\forall_x xe=x$$

$$\forall_{y,z\in\mathbb{R}}\begin{pmatrix}y & z\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & z\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}ya & yb\\0 & 0\end{pmatrix}$$

זה בלתי אפשרי, כי אפשר לבחור $y=0, z=1$ ונקבל $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, ולכן זה לא נכון לכל y, z ולכן בR אין איבר הפיך מימין.

נחפש בR את היחידות משמאל. נניח שe יחידה משמאל, כלומר ש$\forall_{x\in R} ex=e$:

$$e=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix} \qquad \forall_{y,z\in R}: \begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&z\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&z\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}ay&az\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&z\\0&0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $e=\begin{pmatrix}1&b\\0&0\end{pmatrix}$ איבר יחידה משמאל, לכל b.

הגדרה

איבר z בחוג R נקרא מחלק־0 אם קיים $z'\neq 0$ כך ש$zz'=0$ או $z'z=0$

למשל, בחוג $R=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$, $v=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ מחלק־0 כי $v\neq 0, v^2=0$

לדוגמה

בחוג $M_n(\mathbb{Q})$, מחלקי אפס הם האיברים הלא־הפיכים.

מסקנה

בחוג עם חילוק אין מחלקי אפס.

תת־חוגים

יהי R חוג בלי יחידה, ו$S\subseteq R$ תת קבוצה.
S הוא תת־חוג בלי יחידה אם:

- S הוא חוג ביחס לפעולות המושרות מR - חוג בלי יחידה!
- S סגור ביחס לפעולות החיבור, הכפל והנגדי.

מה לגבי איברי יחידה? יכולות להיות לנו כמה אפשרויות:

- בR אין ובS אין
- בR אין ובS יש
- בR יש ובS אין
- בR יש ובS יש

לדוגמה

- $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - אין ואין
- $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - אין ויש
- $\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - יש ואין
- $\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ - יש ויש. במצב כזה $S \subseteq R$ נקרא תת־חוג

יש לנו אפשרות נוספת:

- $\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - לשניהם יש יחידה, אך לא אותו איבר יחידה, לכן החוג S הוא תת־חוג בלי יחידה של החוג R.

הגדרה

תחום: חוג שאין בו מחלקי אפס

תחום שלמות: תחום קומוטטיבי
נקבל:

- שדה הוג תחום שלמות וחוג עם חילוק
- תחום שלמות הוא חוג קומוטטיבי ותחום
- חוג עם חילוק הוא תחום
- חוג קומוטטיבי הוא חוג
- תחום הוא חוג
- חוג הוא חבורה