סדרות

הגדרה

תהי $\{z_n\}$ סדרת מספרים מרוכבים. הסדרה נקראת חסומה אם קיים מספר ממשי $0 < M$ כך ש$\forall_{n\in\mathbb{N}} |z_n| < M$.

הגדרה

תהי $\{z_n\}$ סדרת מספרים מרוכבים. סדרה $[z_n]$ מתכנסת ל$w \in \mathbb{C}$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש$\forall_{n>n_0} |z_n - w| < \epsilon$.

סימון: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$

תרגיל

$$\{i^n\} \qquad \left\{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right\} \qquad \left\{n^2\left(i^n-1\right)\right\}$$

האם הסדרות האלה חסומות?

- $\{i^n\}$: $|i^n| = |i|^n = 1^n = 1$ - הסדרה חסומה ע"י $M = 1$
- $\left\{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right\}$: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(\frac{1}{|1+i|}\right)^n = \left|\frac{1}{1+i}\right|^n$ - הסדרה חסומה ע"י $M = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\left\{n^2\left(i^2-1\right)\right\}$: לכל $n \neq 4k$: $\left|n^2\left(i^n-1\right)\right| = n^2\sqrt{2} \to \infty$ - הסדרה אינה חסומה

עוד תרגיל

הוכיחו כי אם $\{a_n\}$ חסומה אז גם הסדרות הבאות חסומות:

- $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_n\right\}$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \frac{1}{n}\left|\sum a_i\right| \leq \frac{1}{n}\sum |a_i| \leq \frac{1}{n}\cdot M \cdot n = M$$

- $\left\{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}\right\}$ - הפתרון דומה

תרגיל

הוכיחו כי אם סדרה $\{w_n\}$ מתכנסת לw אז $\{|w_n|\}$ מתכנסת ל$|w|$.
ההיפך לא נכון.

הוכחה

תחילה נוכיח את אי השוויון $|u-v| \geq ||u|-|v||$:

$$u=(u-v)+v \Rightarrow |u| \leq |u-v|+|v| \Rightarrow |u-v| \geq |u|-|v|$$

$$v=(v-u)+u \Rightarrow |v| \leq |v-u|+|u| \Rightarrow |u-v| \geq |v|-|u| = -\left(|u|-|v|\right)$$

$$\Rightarrow |u-v| \geq ||u|-|v||$$

נגדיר $u=w_n$, $v=w$. הסדרה $\{w_n\}$ מתכנסת לw, כלומר לכל $\epsilon>0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|w_n-w|<\epsilon$, כלומר

$$||w_n|-|w|| \leq |w_n-w| < \epsilon$$

דוגמה לכך שההיפך לא נכון:

$$w_n=(-1)^n \qquad |w_n|=1$$

מבחן שורש(מבחן קושי)

- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \Leftarrow$ מתכנס בהחלט
- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \Leftarrow$ מתבדר
- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = 1 \Leftarrow$ לא ידוע

מבחן מנה(דלאמבר)

- $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1 \Leftarrow$ מתכנס בהחלט
- $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1 \Leftarrow$ מתבדר
- $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1 \Leftarrow$ לא ידוע

מבחן ראמבה

- $\limsup_{n\to\infty}\left(n\left(\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|-1\right)\right)<-1 \Leftarrow$ מתכנס בהחלט

פונקציות

רציפות: f רציפה בz_0 אם $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

גזירות: f גזירה בz_0 אם $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ קיים וסופי($=f'(z)$)

אנליטיות: f אנליטית בz_0 אם היא גזירה בסביבה כלשהי של נק' z_0(עיגול ברדיוס כלשהי סביב הנקודה)

תנאי קושי רימן(C-R)

תהי $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. תנאי קושי רימן הוא

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$$

משפט

- אם $f=u+iv$ גזירה בנק' $z_0=x_0+iy_0$ אז היא מקיימת C-R בנק' (x_0,y_0).
- אם u,v דיפרנציאביליות ב(x_0,y_0) ומקיימות C-R, אז $f=u+iv$ גזירה ב$z_0=x_0+iy_0$
- $f'=u_x+iv_x=v_y-iu_y$

תרגיל

בדקו האם הפונקציות הבאות רציפות/גזירות/אנליטיות ב$z_0=0$:

1. $f(z)=\bar{z}$
2. $g(z)=|z|^2$
3. $h(z)=\bar{z}-4z^3$

פתרון

1. $f(x+iy)=x-iy$ - רציפה. נבדוק גזירות בשתי דרכים:

(א) לפי הגדרה:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=$$

$$\Rightarrow \lim_{z=x+i0\to 0}\frac{x}{x}=1$$

$$\Rightarrow \lim_{z=0+iy\to 0}\frac{-y}{y}=-1$$

הגבול לא קיים, לכן f לא גזירה בz_0, לכן היא גם לא אנליטית בz_0.

(ב) $f(z)=\bar{z}=\underbrace{x}_{u}-i\underbrace{y}_{v}$

$$v_x=1 \qquad v_y=-1$$

C-R לא מתקיים כי $u_x\neq v_y$

2. $g(z)=|z|^2=x^2+y^2$ - רציפה. נבדוק גזירות:

C-R:

$$\begin{aligned} u_x&=2x & v_x&=0\\ u_y&=2y & v_y&=0\end{aligned}$$

בנק' $z_0=0=0+i0$, $u_x=v_x=u_y=v_y=0$ $\Leftarrow$ הפונקציה גזירה ב$z_0=0$, אבל לא אנליטית כי לא גזירה בשום נקודה אחרת.

3. $h=\bar{z}-4z^3$ - ברור שהיא רציפה, נבדוק גזירות.

$\bar{z}=\bar{h}=h+4z^3$. אילו הפונקציה h גזירה אז גם $\bar{h}$ גזירה, אבל לפי סעיף א', $\bar{z}$ לא גזירה באף נקודה.

דיפרנציאביליות

$f(z)$ נקראת דיפרנציאבילית בz_0, אם קיים $\alpha\in\mathbb{C}$ כך שבסביבה של z_0 ניתן להציג את f כ

$$f(z)=f(z_0)+\alpha(z-z_0)+\phi(z)$$

כאשר

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\phi(z)}{z-z_0}=0$$

תרגיל

1. אפשר להוכיח כי f דיפרנציאבילית ב-z_0 אס"ם f גזירה ב-z_0, ואז $\alpha = f'(z_0)$
2. צ"ל: יהיו f, g פונקציות גזירות בנקודה z_0 כך ש-$f(z_0) = g(z_0)$, $g'(z_0) \neq 0$.
$\Leftarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$.
לפי (1), f, g דיפרנציאביליות.

$$f(z) = f(z_0) + \alpha_f (z - z_0) + \phi_f(z)$$

$$g(z) = g(z_0) + \alpha_g (z - z_0) + \phi_g(z)$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\alpha_f (z - z_0) + \phi_f}{\alpha_g (z - z_0) + \phi_g} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\alpha_f + \frac{\phi_f}{z - z_0}}{\alpha_g + \frac{\phi_g}{z - z_0}} = \lim \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

תרגיל

תהי f גזירה בתחום כלשהו D, לכל $z \in D$ מתקיים $|f(z)| = \text{const} = C \in \mathbb{R}$. צ"ל: f קבועה ב-D.

הוכחה

נגדיר פונקציה $g(z) = |f(z)|^2$, $g(z) = C^2$

$$g(x+iy) = u^2 + v^2 = C^2$$

$$\begin{cases} g_x = 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ g_y = 2uu_y + 2vv_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

- אם $C = 0$ אז $u = v = 0 \Leftarrow f = u + iv = 0$
- אם $C \neq 0 \Leftarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq 0$. קיים פתרון רק אם $\det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = 0$ כלומר $u_x v_y - v_x u_y = 0$. נשתמש ב-C-R:

$$v_y = u_x \qquad v_x = -u_y$$

$$u_x^2 + u_y^2 = 0$$

$$u_x = u_y = 0 \Rightarrow v_x = v_y = 0$$

$\Leftarrow f$ קבועה

תרגיל

f אנליטית ב$\mathbb{C}$ ולכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $(\mathrm{Re} f(z))^2 = \mathrm{Im}(f(z))$. צ"ל: f קבועה.

פתרון

$$u_x = v_y = 2u \cdot u_y = -2uv_x = -4u^2 u_X$$

$$u_x \left(1 + 4u^2\right) = 0$$

$$u_x = 0 \Rightarrow v_y = 0$$

באותו אופן נקבל ... $u_y = v_x = 0 \Leftarrow u_y =$

תרגיל

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

נגדיר:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - u\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

1. צ"ל f מקיימת C-R בתחום D אם"ם $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, וגם במקרה זה $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$

פתרון

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y) =$$

$$= \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{1}{2}i(u_y + v_x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y) =$$

$$= \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{1}{2}i\,(v_x - u_y) = u_x + iv_x = f'$$

סעיף 2

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}f = \frac{1}{4}\Delta f$$

(כאשר Δ הוא הלפלסיאן - $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)