משטח עם שפה

הגדרה

חצי מרחב העליון ב$\mathbb{R}^k$ מוגדר ע"י

$$H^k = \left\{ (x_1, \dots x_k) \in \mathbb{R}^k \middle| x_k \geq 0 \right\}$$

לדוגמה, ב$\mathbb{R}^2$:

$$H^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \geq 0 \right\}$$

השפה של H^k היא

$$\mathbb{R}^{k-1} = \partial H^k = \left\{ (x_1, \dots x_k) \in \mathbb{R}^k \middle| x_k = 0 \right\}$$

הגדרה

Ω קבוצה פתחוה בH^k אם $\Omega = H^k \cap G$ כאשר G קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}^k$

1. Ω קבוצה פתוחה בH^k מסוג ראשון אם $\Omega \cap \partial H^k = \emptyset$
2. Ω קבוצה פתוחה בH^k מסוג שני אם $\Omega \cap \partial H^k \neq 0$

הגדרה

תהי U קבוצה פתוחה בH^k מסוג שני. תהי $f : U \to \mathbb{R}^n$.
נאמר שf דיפרנציאבילית בU אם קיימת פונקציה $F : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית, כאשר $\tilde{U}$ קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}^k$ המכילה את U ו$F \equiv f$ על U.

הגדרה

קבוצה $M \subset \mathbb{R}^n$ נקראת משטח k־ממדי עם שפה אם לכל נקודה $x \in M$ קיימת סביבה $M \cap U_x$ וקיימת קבוצה פתוחה $\Omega \subset H^k$ והומיאומורפיזם F כזה ש

$$F(\Omega) = U_x \cap M$$

ו$\text{rank} F'(t) = k$ לכל $t \in \Omega$.

הגדרה

אם בהגדרה הנ"ל קבוצה Ω מסוג שני אז נאמר שהקבוצה $F\left(\Omega \cap \partial H^k\right)$ שייכת לשפה של M. את האוסף של כל נקודות השפה נסמן על ידי ∂M.

למה

יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח k־מימדי עם שפה ∂M לא ריקה. אזי ∂M משטח $(k-1)$ מימדי.

הוכחה

אטלס של M: $\left(\varphi_i, \Omega_i^1\right)$, $\left(\psi_i, \Omega_j^2\right)$
נגדיר:

$$\tilde{\psi}_j \left(t_1, \dots t_{k-1}\right) = \psi_j \left(t_1, \dots t_{k-1}, 0\right)$$

ואז אטלס של ∂M הוא $\boxed{\left(\tilde{\psi}, \Omega_j^2 \cap \partial H^k\right)}$

1. $\Omega_j^2 \cap \partial H^k$ קבוצות פתוחות ב$\mathbb{R}^{k-1}$
2. לכל $t \in \Omega_j^2 \cap \partial H^k$, $\mathrm{rank}\tilde{\psi}_j'\left(t\right) = k-1$

הערה

$$\partial\left(\partial M\right) = \emptyset$$

דוגמאות

1. $\left\{x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

$$F\left(t,u\right) = \left(\left(1-u\right)\cos t, \left(1-u\right)\sin t\right)$$

$$\left(t,u\right) \in \left(0, 2\pi\right) \times \left[0, \frac{1}{2}\right) \qquad \left(t,u\right) \in \left(-\pi, \pi\right) \times \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

לכן

$$F : \left\{x^2 + y^2 \middle| \frac{1}{2} + \epsilon\right\}$$

2. $M : \left\{a \leq x^2 + y^2 \leq b\right\}$

$$\partial M : \left\{x^2 + y^2 = b\right\} \cup \left\{x^2 + y^2 = a\right\}$$

3. $M = \left\{x^2+y^2<1\right\}$

$$\partial M = \left\{x^2+y^2=1\right\}$$

$$\partial M = \emptyset$$

4. משטח $M \subset \mathbb{R}^3$ 2-מימדי.

עוד דוגמה

חצי ספירה: $\left\{x^2+y^2+z^2=R^2 \middle| z \geq 0\right\}$

$$\partial M : \left\{x^2+y^2=R^2\right\}$$

$$r\left(u,v\right) = \left(R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v\right)$$

$$\left(u,v\right) \in \left(-\overline{u},\overline{u}\right) \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right), \left(u,v\right) \in \left(0,\pi\right) \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$r\left(u,0\right) = \left(R\cos u, R\sin u, 0\right)$$

$$z = \sqrt{R^2-\left(x^2+y^2\right)} \qquad x^2+y^2<R^2$$

הגדרה

יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח עם שפה. תהי $\left(F,\Omega\right)$ מפה, $x = F\left(t\right)$.
אזי מרחב משיק לM בנקודה x מוגדר על ידי

$$T_x\left(M\right) = \left\{F'\left(t\right)\xi, \xi \in \mathbb{R}^k\right\}$$

משפט

יהי $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח k-ממדי עם שפה ובעל אוריינטציה. אזי ∂M גם משטח בעל אוריינטציה.

הוכחה

נניח ש$\left(\psi_j, \Omega_j^2\right)$ ו$\left(\varphi_i, \Omega_i^1\right)$ אטלס המגדיר אוריינטציה בM.

אטלס של ∂M: $\left(\tilde{\psi}_j, \Omega_j^2 \cap \partial H^k\right)$ כאשר

$$\tilde{\psi}_j\left(t_1, \ldots t_{k-1}\right)=\psi_j\left(t_1, \ldots t_{k-1}, 0\right)$$

ואז

$$T_{ij}=\psi_i^{-1}\left(\psi_j\left(u_1, \ldots u_k\right)\right)=\left(g_1\left(u_1, \ldots u_k\right), \ldots g_k\left(u_1, \ldots u_k\right)\right)$$

$$\tilde{T}_{ij}=\tilde{\psi}_i^{-1} \circ \tilde{\psi}_j=\left(g_1\left(u_1, \ldots u_{k-1},-\right), g_2\left(u_1, \ldots u_{k-1}, 0\right)\right)$$

$$g_k\left(u_1, \ldots u_{k-1}, 0\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial g_k}{\partial t_e}\left(u_1, \ldots u_{k-1}, 0\right)=0 \qquad 1 \leq e \leq k-1$$

$$T_{ij}^{\prime}\left(u_1, \ldots u_{k-1}, 0\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1}\left(u_1, \ldots u_{k-1}, 0\right) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_k}\left(u_1, \ldots u_{n-1}, 0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial t_k}\left(u_1, \ldots u_{k-1}, 0\right) \end{pmatrix}$$

$$\det T_{ij}^{\prime}\left(u_1 \ldots u_{k-1}, 0\right)=\frac{\partial g_k}{\partial t_k}\left(u_1, \ldots u_{k-1}, 0\right) \cdot \det \tilde{T}_{ij}^{\prime}\left(u_1, \ldots u_{k-1}\right)>0$$

נניח ש$x=\psi(t), x \in \partial M$, כאשר

$$t=\left(t_1, \ldots t_{k-1}, 0\right) \in \partial H^k$$

$$T_x(\partial M)=\left\{\tilde{\psi}^{\prime}\left(t_1, \ldots t_{k-1}\right) \tau \middle| \tau \in \mathbb{R}^{k-1}\right\}$$

$$T_x(M)=\left\{\psi^{\prime}\left(t_1, \ldots t_{k-1}, 0\right) \xi \middle| \xi \in \mathbb{R}^k\right\}$$

$$\gamma_i=\tilde{\psi}^{\prime}\left(t_1, \ldots t_{k-1}\right) e_i \qquad i=1, \ldots k-1$$

- $\left[\gamma_1, \ldots \gamma_{k-1}\right]$ הבסיס של $T_x(\partial M)$
- $\left[\gamma_1, \ldots \gamma_{k-1}, \psi^{\prime}\left(t_1, \ldots t_{k-1}, 0\right) e_k\right]$ הבסיס של $T_x(M)$

$$\boxed{\begin{gathered} T_x(\partial M) \subset T_x(M) \\ \dim T_x(\partial M)=k-1 \\ \dim T_x(M)=k \\ \dim \left\{h \in T_x(M) \mid h \perp T_x(\partial M)\right\}=1 \end{gathered}}$$