פתרון תרגיל בית 5 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תש"ף

תרגיל 1 (חימום)**.** תהי K/F הרחבת שדות ספרבילית, ויהי L שדה ביניים. הוכיחו כי גם L/F וגם K/L ספרביליות.

פתרון. ברור ש-L/F ספרבילית, כי כל איבר ב-L הוא איבר של K. עבור K/L, יהי $a \in K$ ויהי $m_{a,F}$ הפולינום המינימלי של a מעל F. אז $m_{a,L}|m_{a,F}$ ולכן ל-$m_{a,L}$ אין שורשים כפולים. לכן K/L ספרבילית.

שאלה 2. קבעו האם הפולינומים הבאים ספרביליים.

א. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ מעל $\mathbb{Q}$.

ב. $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ מעל $\mathbb{Q}$.

ג. $x^{10} + x^5 + 3$ מעל $\mathbb{F}_5$.

ד. $x^p - x + a$ מעל שדה F ממאפיין $p > 0$ (שפגשנו כבר בכיתה).

פתרון.

א. נחשב $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$, מכיוון שישנם רק גורמים לינאריים, מספיק לבדוק אם מישהו מהם מחלק את $f(x)$, ואפשר לבדוק זאת עם הצבה. אכן $f(2) = 0$, ולכן $(x-2)$ הוא גורם משותף של f ו-f' מה שאומר ש-$f(x)$ לא ספרבילי.

ב. ניתן לראות (ולהיעזר בשיטה שראינו למציאת שורשים רציונאליים) כי ± 1 הם שורשים של $f(x)$, ולכן מתפרק ל- $f(x) = (x-1)(x+1)(x^3 - 2x - 2)$. מפני ש-$\pm 1$ הם לא שורשים של $x^3 - 2x - 2$, אז $f(x)$ ספרבילי אם ורק אם $x^3 - 2x - 2$ ספרבילי. ואכן, $x^3 - 2x - 2$ הוא אי פריק (למשל לפי אייזנשטיין עם 2) ובמאפיין 0 זה גורר שהפולינום ספרבילי.

ג. הנגזרת היא 0 ולכן הפולינום לא ספרבילי.

ד. נחשב $f'(x) = px^{p-1} - 1 \equiv -1$. לכן $(f, f') = 1$ ומכאן שהפולינום ספרבילי.

שאלה 3. תהי K/F הרחבת שדות ויהיו $f, g \in F[x]$ פולינומים עם שדות פיצול L_1, L_2 בהתאמה. הוכיחו כי תת־השדה הכי קטן של K שמכיל את L_1 ו-L_2 הוא גם שדה פיצול מעל F (אולי של פולינום אחר).

פתרון. יהי L שדה הפיצול של המכפלה $f \cdot g$ מעל F. מצד אחד כל השורשים של f, g נמצאים ב-L ולכן L מכיל את L_1, L_2. מצד שני, אם L' הוא שדה אחר המכיל את L_1, L_2, אז הוא מכיל גם את כל השורשים של f, g ולכן הוא מפצל את $f \cdot g$. לכן לפי ההגדרה של שדה פיצול $L \subseteq L'$ כנדרש.

שאלה 4. יהי פולינום $f(x) \in F[x]$, ויהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כל שורשי הפולינום.
הוכיחו כי שדה הפיצול של $f(x)$ מעל F הוא $F[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$.

פתרון. נסמן את הפולינום $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ כאשר $a_i\in F$. מעל שדה הפיצול $f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ נכפול ונקבל שהמקדם החופשי הוא

$$\alpha_1\cdots\alpha_n=a_0\in F$$

לכן $\alpha_1=\frac{a_0}{\alpha_2\cdots\alpha_n}\in F[\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$ ומכאן ששדה הפיצול הוא $F[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]=F[\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$.

שאלה 5. תהי K/F הרחבת שדות ממימד 2. הסיקו מהשאלה הקודמת ש-K הוא שדה פיצול של פולינום כלשהו ב-$F[x]$.

פתרון. ניקח $\alpha\in K\backslash F$. ברור ש-$K=F(\alpha)$ ולכן הפולינום המינימלי של α ממעלה 2. כלומר

$$f(x)=x^2+bx+c$$

נניח שהמאפיין של השדות שונה מ-2, אזי השורשים הם כמובן

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

מפני ש-$\alpha\in K$ קל לראות ש-$\sqrt{b^2-4c}\in K$, ולכן גם השורש השני ב-K. כלומר K שדה מפצל של הפולינום. היות ואין עוד שדות בין K לבין F, אז K הוא שדה הפיצול.
פתרון שמתאים לכל מאפיין: α הוא שורש של הפולינום $f(x)$ שלמעלה. לכן ב-K מתקיים

$$x-\alpha\mid f(x)$$

אבל $f(x)$ בסך הכל ממעלה 2 וזה אומר שב-K מתקיים $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$. לכן $\alpha^{-1}\cdot\alpha\beta=\beta\in K$ כי $\alpha^{-1}\in K$ וגם $\alpha\beta\in F\subseteq K$. לכן K מפצל את $f(x)$, והוא ממש שדה הפיצול כי כל שדה קטן יותר יהיה F בעצמו.

שאלה 6 (רשות). יהי $f=x^5+x^3+x+1\in F[x]$. הוכיחו כי f ספרבילי אם ורק אם $\operatorname{char}F\neq 11,37$.

פתרון. מחשבים את בעזרת אלגוריתם אוקלידס המורחב ומגלים כי

$$\begin{aligned}\gcd(f,f')&=1\\&=\left(-\frac{190}{407}x^3+\frac{80}{407}x^2-\frac{284}{407}x+\frac{33}{37}\right)f+\\&\quad\left(\frac{38}{407}x^4-\frac{16}{407}x^3+\frac{72}{407}x^2-\frac{79}{407}x+\frac{4}{37}\right)f'\end{aligned}$$

נשים לב ש-$407=11\cdot 37$, ולכן מדובר בחילוק באפס בשדות ממאפיין 11 או 37. בשדות כאלו המחלק המשותף המרבי הוא פולינום ממעלה חיובית.

בהצלחה!