אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 4

20 בנובמבר 2019

תזכורת: יהי (X,S) מרחב מדיד ותהי $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה. נאמר ש־f מדידה אם לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{x\in X\,|\,f(x)>\alpha\}\in S$ או $\{x\in X\,|\,f(x)\geq\alpha\}\in S$ או $\{x\in X\,|\,f(x)<\alpha\}\in S$ או $\{x\in X\,|\,f(x)\leq\alpha\}\in S$. ראינו בהרצאה שאלו תנאים שקולים.

הערה: אם (X,τ) מרחב טופולוגי, והקבוצות האלה נמצאות ב־σ־אלגברת בורל של X, נאמר ש־f מדידה בורל.

תרגיל: האם הפונקציה $T(x)=\begin{cases}\sin(2x) & x>0\\ 1+\cos(x) & x\leq 0\end{cases}$ מדידה בורל?

סימון: תהי E קבוצה. נסמן את פונקצית האינדיקטור שלה $\mathbb{1}_E=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$. נזכיר כי E מדידה אם ורק אם $\mathbb{1}_E$ מדידה.

פתרון: נשים לב שאפשר לכתוב

$$T(x)=\sin(2x)\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}+(1+\cos(2x))\,\mathbb{1}_{(-\infty,0]}$$

הקטעים $(-\infty,0]\,,(0,\infty)$ מדידים בורל, ולכן גם פונקציות האינדיקטור מדידות. הפונקציות הטריגונומטריות הן רציפות ולכן מדידות. ראינו בהרצאה כי סכום ומכפלה של פונקציות מדידות היא פונקציה מדידה, לכן סך הכל $T(x)$ מדידה בורל.

טענה: יהי (X,S) מרחב מדיד ותהי $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה. f היא פונקציה מדידה אם ורק אם לכל קבוצה A מדידה בורל, $f^{-1}(A)\in S$.

הוכחה: כיוון אחד קל - נניח שלכל קבוצה A מדידה בורל, $f^{-1}(A)\in S$. נשים לב כי $\{x\in X\,|\,f(x)\leq\alpha\}=f^{-1}((-\infty,\alpha])$. אבל כל קטע הוא מדיד בורל, לכן $\{x\in X\,|\,f(x)\leq\alpha\}\in S$. זה נכון לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ולכן f מדידה. כעת נניח כי f מדידה. נוכיח שאוסף הקבוצות המקיימות את התנאי הוא σ־אלגברה, ושהיא מכילה את σ־אלגברת בורל. נסמן $\mathcal{B}=\left\{A\,|\,f^{-1}(A)\in S\right\}$. ברור כי $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathcal{B}$. תהי $A\in\mathcal{B}$. אז $f^{-1}(A)\in S$ ולכן $f^{-1}(A^c)=\left(f^{-1}(A)\right)^c\in S$, כלומר $A^c\in\mathcal{B}$. תהי $\{A\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{B}$ סדרת קבוצות. לכל A_n מתקיים $f^{-1}(A_n)\in S$ ולכן $f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right)=\bigcup_n\left(f^{-1}(A_n)\right)\in S$, אז גם $\bigcup_n A_n\in\mathcal{B}$. קיבלנו כי $\mathcal{B}$ היא σ־אלגברה. כיוון ש-f מדידה, לכל $\alpha\in\mathbb{R}$

מתקיים $f^{-1}\left(\left(-\infty,\alpha\right]\right)=\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)\leq\alpha\right\} \in S$ ולכן $\left(-\infty,\alpha\right]\in\mathcal{B}$. נובע מכאן כי $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)=\sigma\left(\left\{ \left(-\infty,\alpha\right]\,|\,a\in\mathbb{R}\right\} \right)\subseteq\mathcal{B}$. מדוע σ־אלגברת בורל נוצרת על ידי קרנות מהצורה הזו? נוכל ליצור קטעים פתוחים בעזרת חיתוך של קרנות ומשלימים שלהן. ראינו כל כל קבוצה פתוחה היא חיתוך בן מניה של קטעים פתוחים, לכן נוכל ליצור כל קבוצה פתוחה, ומסגירות למשלים גם כל קבוצה סגורה בטופולוגיה. אם כן, הוכחנו כי $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\subseteq\mathcal{B}$, כלומר לכל לכל קבוצה A מדידה בורל, $f^{-1}\left(A\right)\in S$.

תרגיל: יהי $\left(X,S\right)$ מרחב מדיד. תהיינה $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה־לבג, ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה־בורל. הראו כי $h=g\circ f$ מדידה־לבג.

הוכחה: נשתמש בהגדרה השקולה למדידות־לבג שהוכחנו קודם. תהי $A\subseteq\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ קבוצה מדידה־בורל. כיוון ש-g מדידה־בורל, $g^{-1}\left(A\right)$ גם מדידה־בורל. כעת כיוון ש־f מדידה־לבג, $f^{-1}\left(g^{-1}\left(A\right)\right)\in S$, אבל $h^{-1}\left(A\right)=f^{-1}\left(g^{-1}\left(A\right)\right)$, וזה נכון לכל קבוצה מדידה־בורל, לכן h מדידה־לבג.

תרגיל: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית (ממש). הראו כי f מדידה־בורל.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח ש-f מונוטונית עולה ממש. (אחרת אפשר לכפול ב--1). יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נחלק למקרים:

1. אם α נמצא בטווח של f (זכרו כי f לא חייבת להיות רציפה), אז מהמונוטוניות נקבל כי $\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)\geq\alpha\right\} =\left[f^{-1}\left(\alpha\right),\infty\right)\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.
2. אם α לא נמצא בטווח של f, נגדיר $\beta=\inf\left\{ f(x)\,|\,f(x)>\alpha\right\}$. כעת יש שלוש אפשרויות:
   (א) אם הקבוצה $\left\{ f(x)\,|\,f(x)>\alpha\right\}$ ריקה, היא בפרט מדידה־בורל.
   (ב) אם $\beta\in\left\{ f(x)\,|\,f(x)>\alpha\right\}$, אז $\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)\geq\alpha\right\} =\left[f^{-1}\left(\beta\right),\infty\right)\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.
   (ג) אם $\beta\notin\left\{ f(x)\,|\,f(x)>\alpha\right\}$ אז $\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)\geq\alpha\right\} =\left(f^{-1}\left(\tilde{\beta}\right),\infty\right)\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$, עבור $\tilde{\beta}$ נקודת רציפות מימין של f. (ל-β עצמו לא בטוח שיש מקור).

   בכל מקרה ניתן לראות כי f מדידה־בורל.

תרגיל: יהי $\left(X,\mathbb{A}\right)$ מרחב מדיד כאשר $\mathbb{A}=\left\{ \emptyset,X\right\}$. תהי $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה. מהן הפונקציות המדידות־$\mathbb{A}$?

פתרון: נניח כי f מדידה־$\mathbb{A}$. אז לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, $\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)\leq\alpha\right\} \in\mathbb{A}$. כמו־כן גם $-f$ מדידה־$\mathbb{A}$, ולכן
$\left\{ x\in X\,|\,-f\left(x\right)\leq-\alpha\right\} =\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)\geq\alpha\right\} \in\mathbb{A}$. קיבלנו כי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)=\alpha\right\} =\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)\geq\alpha\right\} \cap\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)\leq\alpha\right\} \in\mathbb{A}$$

כחיתוך של קבוצות מדידות. כעת יהי $x\in X$. נסמן $c=f(x)$. אז $x\in\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)=c\right\}$, כלומר זו קבוצה מדידה־$\mathbb{A}$ לא ריקה, לכן $\left\{ x\in X\,|\,f\left(x\right)=c\right\} =X$. קיבלנו כי f קבועה, $f\equiv c$. סך הכל, הפונקציות המדידות־$\mathbb{A}$ הן הפונקציות הקבועות.

הגדרה: פונקציה פשוטה היא פונקציה מדידה $\varphi : X \to \mathbb{R}$ המקבלת מספר סופי של ערכים.

משפט: (משפט הקירוב) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה. אז קיימת סדרה עולה של פונקציות פשוטות $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ נקודתית. יתר־על־כן, אם f חסומה קיימת סדרה כנ"ל המתכנסת ל־f במידה שווה.