פתרון תרגיל בית 5

שאלה 1

נסתכל בתת־חבורה נורמלית של המספרים הרציונליים $(\mathbb{Z},+)\lhd(\mathbb{Q},+)$.

א. הוכיחו כי בחבורת המנה $G=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הסדר של כל איבר הוא סופי.

ב. הוכיחו כי תת־החבורה של G שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{1}{10}$ ו-$\frac{3}{8}$ היא ציקלית. כלומר יש להוכיח $\left\langle \frac{1}{10}+\mathbb{Z},\frac{3}{8}+\mathbb{Z}\right\rangle=\langle a+\mathbb{Z}\rangle$ עבור $a\in\mathbb{Q}$ כלשהו.

ג. מהו הסדר של תת־החבורה מהסעיף הקודם? מהו האינדקס שלה ב-G?

פתרון

א. איבר היחידה בחבורה G הוא המחלקה $0+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. לכן יש למצוא לכל $x\in G$ איזשהו $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$n\cdot x=\mathbb{Z}$ (החבורה היא חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-n).

כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x=\frac{a}{b}+\mathbb{Z}$ עבור $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}$.

מכאן רואים כי $b\left(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right)=a+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ ולכן x הוא לכל היותר מסדר b.

ב. יש להראות כי $\left\langle \frac{1}{10}+\mathbb{Z},\frac{3}{8}+\mathbb{Z}\right\rangle=\left\langle \frac{1}{40}+\mathbb{Z}\right\rangle$ (אפשר להראות שיש גם יוצרים אחרים). ההוכחה היא לפי הכלה דו־כיוונית של היוצרים:

רואים כי $4\cdot\frac{1}{40}=\frac{1}{10}$ וגם $15\cdot\frac{1}{40}=\frac{3}{8}$ בכיוון אחד. בכיוון השני $4\cdot\frac{1}{10}-1\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{40}$.

ג. סדר תת־החבורה הוא 40 והאינדקס שלה הוא אינסופי. אפשר לראות כי לכל שני ראשוניים $p_1\neq p_2$ שונים שאינם 2 או 5 יתקיים כי $\frac{1}{p_1}+\left\langle\frac{1}{40}+\mathbb{Z}\right\rangle\neq\frac{1}{p_2}+\left\langle\frac{1}{40}+\mathbb{Z}\right\rangle$ ולכן ישנן אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

מש"ל

שאלה 2

א. תהי $H \le G$. הראו ש-$H \cap Z(G) \subseteq Z(H)$, ותנו דוגמה שבה זו הכלה אמיתית.

ב. בכל סעיף תנו דוגמה לחבורה G ולתת חבורה $H \le G$ המדגימה את הדרוש:

1. $Z(H) \subset Z(G)$ (הכלה ממש)
2. $Z(G) \subset Z(H)$
3. $Z(H)$ אינו מוכל ב-$Z(G)$ ואינו מכיל אותו.

פתרון

א. יהי $x \in H \cap Z(G)$. אזי $x \in H$. צ"ל: לכל $h \in H$ מתקיים $xh = hx$. אך $x \in Z(G)$ ולכן מתחלף עם כל איברי G ובפרט עם כל איברי H.

דוגמה לכך שיש הכלה אמיתית:

$G = D_4, H = \langle \sigma \rangle$, $Z(G) = \langle \sigma^2 \rangle, Z(H) = H$.

ב. 1. $G = \mathbb{Z},\ H = 2\mathbb{Z}$.

2. הדוגמה מסעיף (א).

3. $G = D_4, H = \langle \tau \rangle$.

מש"ל

שאלה 3

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות. עבור הטענות הנכונות מצאו גרעין.

א. קיים אפימורפיזם מהחבורה S_{14} לחבורה מסדר 34.

ב. קיים אפימורפיזם $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{60}$.

ג. קיים אפימורפיזם $\varphi : \mathbb{Z}_{60} \to \mathbb{Z}_{12}$.

ד. קיים איזומורפיזם $\varphi : D_6 \to U_{13}$.

ה. קיים מונומורפיזם $\varphi : A_4 \to S_5$.

ו. קיים מונומורפיזם $\varphi : \mathbb{Z}_{24} \to S_4$.

פתרון

א. לא קיים אפימורפיזם. לו היה קיים אפימורפיזם φ כזה, אז $|S_{14} / \ker\varphi| = 34$. אבל $34 = 2 \cdot 17$ אינו מחלק את סדר החבורה $|S_{14}| = 14!$, כי 17 הוא ראשוני גדול מ-14.

ב. קיים אפימורפיזם לפי $\varphi(x)=x(\bmod 60)$. הגרעין הוא $60\mathbb{Z}$.
ג. קיים אפימורפיזם לפי $\varphi(x)=x(\bmod 12)$. הגרעין הוא $12\mathbb{Z}_{60}=\{0,12,24,36,48\}$.
ד. לא קיים איזומורפיזם כי D_6 לא אבלית ואילו U_{13} אבלית.
ה. קיים מונומורפיזם "טבעי" ששולח תמורה לעצמה. במונומורפיזם הגרעין הוא טריוויאלי.
ו. לא קיים מונומורפיזם כי סדר החבורות שווה, ולכן מונומורפיזם יהיה איזומורפיזם, אך $\mathbb{Z}_{24}$ אבלית ואילו S_4 לא אבלית.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

א. הוכיחו: אם $N\lhd G$ אזי $Z(N)\lhd G$.
ב. מצאו תת חבורה מאינדקס 3 של S_4, והראו שהיא אינה נורמלית.

<u>פתרון</u>

א. צריך להראות שלכל $g\in G$ מתקיים $gZ(N)g^{-1}\subseteq Z(N)$. יהי $x\in gZ(N)g^{-1}$, אזי קיים $n\in Z(N)$ כך ש- $x=gng^{-1}$. מכיוון ש- $n\in Z(N)\subseteq N$ ו- $N\lhd G$, מתקיים $x\in N$. כעת נותר להראות שלכל $t\in N$ מתקיים $xt=tx$, או $gng^{-1}t=tgng^{-1}$ וזה שקול ל- $ng^{-1}tg=g^{-1}tgn$. אבל $n\in Z(N)$ ו- $g^{-1}tg\in N$ (שוב, בגלל הנורמליות) ולכן הוכחנו הדרוש.

ב. למעשה יש למצוא תת חבורה מסדר 8 שהיא לא נורמלית. הצעה לחבורה כזאת: $H=\langle(1234),(12)(34)\rangle$. איבריה הם: $\{id,(1234),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1432),(13),(24)\}$. ניתן לראות שהיא לא נורמלית, שכן היא מכילה חילופים, אבל לא את כל החילופים.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

א. תנו דוגמה נגדית לטענה השגויה הבאה: אם $A,B\lhd G$, ו- $G/A\cong B$ אזי $G/B\cong A$.
ב. נניח $K\lhd G$ ו- $G/K\cong\mathbb{Z}$. הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת ב- G תת חבורה מאינדקס n.

פתרון

א. ניקח למשל $G=D_4$. וניקח שתי תתי חבורות נורמליות: $A=\langle\sigma\rangle, B=Z(D_4)=\langle\sigma^2\rangle$. אכן מתקיים $D_4/\langle\sigma\rangle \cong \langle\sigma^2\rangle$ (כי יש חבורה יחידה מסדר 2). אך לא מתקיים ש- $D_4/\langle\sigma^2\rangle \cong \langle\sigma\rangle$, שכן החבורה מימין היא ציקלית, והחבורה משמאל היא לא (זכרו שהוכחנו בתרגול טענה אודות חבורה מודולו המרכז שלה).

ב. מכיוון ש- $G/K \cong \mathbb{Z}$, קיים אפימורפיזם $f_1:G\to\mathbb{Z}$. כמו כן, קיים אפימורפיזם $f_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$. אזי העתקת ההרכבה $\phi=f_2\circ f_1:G\to\mathbb{Z}_n$ היא גם כן אפימורפיזם. לכן תת החבורה הדרושה היא $\ker\phi$, ולפי משפט איזומורפיזם ראשון קל להיווכח שהיא אכן מאינדקס n.

מש"ל

שאלה 6

הראו שבכל אחת מהחבורות $\mathbb{Z}_6, S_3$ קיימת תת חבורה נורמלית שאיזומורפית ל- $\mathbb{Z}_3$, כך שהמנה איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2$. האם קיימת בשתיהן תת חבורה נורמלית שאיזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2$?

פתרון

ב- $\mathbb{Z}_6$ ניתן לבחור את $2\mathbb{Z}_6=\{0,2,4\}$. היא נורמלית כי החבורה היא אבלית.

ב- S_3 ניתן לבחור את $\langle(123)\rangle$. היא נורמלית כי היא מאינדקס 2.

בשני המקרים המנה איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2$ משיקולי סדר (+העובדה שיש חבורה יחידה מסדר 2, עד כדי איזומורפיזם).

ב- $\mathbb{Z}_6$ קיימת תת חבורה נורמלית שאיזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2$. ניתן לקחת (למשל) את $3\mathbb{Z}_6=\{0,3\}$.

ב- S_3 אין תת חבורה נורמלית מסדר 2. תת החבורות היחידות מסדר 2 הן: $\langle(12)\rangle,\langle(13)\rangle,\langle(23)\rangle$. הן לא נורמליות. הסבר: תת חבורה $H\le S_n$ היא נורמלית אמ"מ יחד עם כל איבר שלה היא מכילה את כל התמורות מאותו מבנה מחזורים של איבר זה.

מש"ל

שאלה 7

תהי G חבורה ו- $N\triangleleft G$. האם יתכן ש- N ו- G/N שתיהן אבליות, אבל G איננה כזאת?

פתרון

התשובה היא כן. הנה הדוגמה: $G=S_3\ ,\ N=\langle(123)\rangle$.

מש"ל

<u>שאלה 8</u>

א. תהי G חבורה עם תת חבורה H ותת-חבורות נורמליות N,N'.
הוכיחו: אם $N\cap H=N'\cap H$ אזי $(HN)/N\cong (HN')/N'$.

ב. תהי G חבורה ו- $N\lhd G$. נניח ש- G/N ו- N אבליות. תהי $H\le G$ תת חבורה כלשהי. הוכיחו שקיימת $K\lhd H$, כך ש- H/K ו- K אבליות.

<u>פתרון</u>

א. לפי משפט האיזומורפיזם השני מקבלים
$HN/N\cong H/H\cap N\ ;\ HN'/N'\cong H/H\cap N'$ ואז מהנתון מסיקים הדרוש.

ב. נגדיר את K להיות $H\cap N$. מכיוון ש- $N\lhd G$ נקבל $H\cap N\lhd H$.
בנוסף, מכיוון ש- $H\cap N\le N$ נקבל שהיא אבלית. נותר להראות ש- $H/H\cap N$ אבלית. שימו לב שלפי משפט איזומורפיזם השני ידוע כי $H/H\cap N\cong HN/N$. כעת, מכיוון ש- HN/N היא תת חבורה של G/N, היא אבלית. לכן גם $H/H\cap N$ אבלית, כנדרש.

מש"ל