

תרגיל בית 7 אינפי 3

1. משטח נתון על ידי המשוואה $z = e^{-x^2-2y^2}$.

(א) מצאו $P = (x_0, y_0, z_0)$ נקודה על המשטח, כך שאם יניחו עליה כדור, הוא יתחיל לנוע בכיוון $(2, 1, a)$ עבור a כלשהוא. מצאו גם את a .

(ב) מצאו נקודה על המשטח שאם יניחו עליה את הכדור הוא לא יזוז לשום מקום.

2. נגדיר משטח על ידי

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

כאשר $0 < a \in \mathbb{R}$. בנקודה P כלשהיא שעל המשטח, מעבירים מישור משיק למשטח. מישור זה חותך את ציר x בנקודה P_x את ציר y בנקודה P_y ואת ציר z בנקודה P_z (שימו לב ש $P_x, P_y, P_z \in \mathbb{R}^3$). הוכיחו כי $\|P_x\| + \|P_y\| + \|P_z\|$ הוא סכום קבוע שאינו תלוי בנקודה שבה העברנו מישור משיק. מצא סכום זה (כפרמטר של a).

3. תהי $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור \mathbb{R}^2 . נתון

$$\frac{\partial f}{\partial u}(7, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(7, 1) = 3$$

. נגדיר:

$$u(x, y) = 2x + 3y \quad v(x, y) = x - y$$

$$z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

$$\text{חשב את } \frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) \text{ ואת } \frac{\partial z}{\partial y}(2, 1).$$

4. תהי $z(x, y)$ גזירה ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים במישור הממשי. כתבו את הביטוי

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$$

באמצעות קוארדינטות פולאריות. (כלומר $x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$ כאשר $r \geq 0$ ו

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

5. תהי פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בקבוצה $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$. נתון כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש

$$x f'_x + y f'_y = n f$$

לכל $(x, y) \in D$. הוכיחו כי

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

לכל $(x, y) \in D$ ו $t > 0$.

הדרכה: הגדירו

$$F(t) = \frac{f(tx, ty)}{t^n}$$

והוכיחו כי F קבועה.