פתרון תרגיל בית 6

1. חשבו את $\iint_\sigma x^2 y dS$ כאשר σ הוא חלק הגליל $x^2+z^2=1$ שבין $y=0$ ו $y=1$ ומעל למישור xy. רמז: התשמשו בעובדה כי $\int \frac{u^2du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C$

פתרון:

$$\iint_\sigma x^2 y dS = \int_0^1\int_{-1}^1 x^2 y\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+1}dxdy$$

$$\int_0^1\int_{-1}^1 x^2 y\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dxdy = \int_0^1\left[-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_{-1}^1 ydy = \int_0^1\frac{\pi}{2}ydy = \frac{\pi}{4}$$

2. חשבו את $\iint_\sigma z^2 dS$ כאשר σ הוא חלק החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ שבין המישורים $z=1$ ו $z=2$.

פתרון:

$$\iint_\sigma \left(x^2+y^2\right)\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1}dxdy$$

$$\iint_R \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_1^2\sqrt{2}r^3drd\theta = \frac{15\pi}{\sqrt{2}}$$

3. חשבו $\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2+z^2}dS$ כאשר σ היא חלק החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ שמתחת למישור $z=1$.

פתרון:

$$\iint_\sigma \left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1}dxdy$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2drd\theta = \frac{\pi 4}{3}$$

4. $\iint_{\sigma} xyzdS$, כאשר σ הוא חלק החרוט

$$r(u,v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + 3u\mathbf{k}$$

המקיים - $1 \le u \le 2, 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

פתרון:

$$r_v = -u\sin v\mathbf{i} + u\cos v\mathbf{j}$$
$$r_u = \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$r_u \times r_v = -3u\cos v - 3u\sin v + u \Rightarrow \|r_u \times r_v\| = \sqrt{10}u$$

$$\iint_{\sigma} xyzdS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 3u^3 \cos v \sin v \sqrt{10} ududv = \frac{93}{\sqrt{10}}$$