

חשבון אינפי 2 למדמ"ח

תרגיל 7- פתרון

נקודות קיצון מקומי, נקודות קיצון תחת אילוצים.

1. מצאו נקודות קיצון מקומי של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 3(x^2 + y^2) + x^3 + 4y \quad \text{א.}$$

פתרון:

נקודות חשודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} f'_x = 6x - 3x^2 = 0 \\ f'_y = 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

נקודות חשודות לקיצון $\left(2, -\frac{2}{3}\right), \left(0, -\frac{2}{3}\right) \Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

• נבדוק את הנקודה $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$:

$$\Delta_1\left(0, -\frac{2}{3}\right) = 6 > 0$$

$$\Delta_2\left(0, -\frac{2}{3}\right) = 36 > 0$$

נקודת מינימום מקומי $\left(0, -\frac{2}{3}\right) \Leftarrow$

• נבדוק את הנקודה $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$:

$$\Delta_1\left(2, -\frac{2}{3}\right) = -6 < 0$$

$$\Delta_2\left(2, -\frac{2}{3}\right) = -36 < 0$$

$\left(2, -\frac{2}{3}\right)$ אין קיצון בנקודה (אוכף) \Leftarrow

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 \quad \text{ב.}$$

נקודות חשודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ f_y = 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

$\left(-1, -2\right), \left(-1, 2\right), \left(-\frac{5}{3}, 0\right), (0, 0) \Leftarrow$ נקודות חשודות לקיצון .

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yz} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{vmatrix}$$

• נבדוק את הנקודה $(0,0)$:

$$\Delta_1(0,0) = 10 > 0$$

$$\Delta_2(0,0) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

$(0,0)$ נקודת מינימום מקומי. \Leftarrow

• נבדוק את הנקודה $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$:

$$\Delta_1\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = -10 < 0$$

$$\Delta_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10/3 + 2 \end{vmatrix} = \frac{40}{3} > 0$$

$\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ נקודת מקסימום מקומי. \Leftarrow

• נבדוק את הנקודה $(-1,2)$:

$$\Delta_1(-1,2) = -2 < 0$$

$$\Delta_2(-1,2) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$(-1,2)$ אין קיצון בנקודה $(-1,2)$, ז"א $(-1,2)$ נקודת אוכף. \Leftarrow

• נבדוק את הנקודה $(-1,-2)$:

$$\Delta_1(-1,-2) = -2 < 0$$

$$\Delta_2(-1,-2) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$(-1,-2)$ אין קיצון בנקודה $(-1,-2)$. (אוכף) \Leftarrow

2. מצאו נקודות קיצון של הפונקציות הבאות בתחומים סגורים :

$$f(x, y) = 5 - 3x - 4y \quad x^2 + y^2 \leq 25 \quad \text{א.}$$

נבדוק האם יש לפונקציה $f(x, y)$ נקודות קיצון בתחום $x^2 + y^2 < 25$

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -3 \neq 0 \\ f_y &= -4 \neq 0 \end{aligned} \right\}$$

← אין נקודות קיצון בתוך התחום.

← נחפש נקודות קיצון על השפה של התחום

$$L(x, y, \lambda) = 5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

$$\left\{ \begin{aligned} L_x &= -3 + 2x\lambda = 0 \\ L_y &= -4 + 2y\lambda = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{נקודות חשודות לקיצון} \left\{ \begin{aligned} (3, 4) & \text{ for } \lambda = \frac{1}{2} \\ (-3, -4) & \text{ for } \lambda = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right. \leftarrow$$

הקבוצה $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$ קבוצה סגורה וחסומה ולכן פונקציה

רציפה מקבלת בה מינימום ומקסימום, ולכן נותר להשוות את ערכי הפונקציה $f(x, y)$ בנקודות חשודות לקיצון.

$$f(3, 4) = -20$$

$$f(-3, -4) = 30$$

← נקודת מקסימום בתחום הסגור. $(-3, -4)$

$(3, 4)$ נקודת מינימום בתחום הסגור.

$$f(x, y) = \sqrt{3}xy + x^2 \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{ב.}$$

נבדוק האם יש לפונקציה $u(x, y)$ נקודות קיצון בתחום $x^2 + y^2 < 1$

$$\left\{ \begin{aligned} f_x &= \sqrt{3}y + 2x = 0 \\ f_y &= \sqrt{3}x = 0 \end{aligned} \right\}$$

← נקודה חשודה לקיצון ב $x^2 + y^2 < 1$.

← נחפש נקודות קיצון על השפה של התחום

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{3}xy + x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = \sqrt{3}y + 2x + 2x\lambda = 0 \\ L_y = \sqrt{3}x + 2y\lambda = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{נקודות חשודות לקיצון.} \quad \begin{cases} \left(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & \text{for } \lambda = \frac{1}{2} \\ \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2} \right) & \text{for } \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftarrow$$

נשווה את הערכים של $f(x, y)$ בכל הנקודות החשודות:

$$f(0,0) = 0 \qquad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \qquad f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{נקודות מינימום בתחום.} \quad \left(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Leftarrow$$

$$\text{נקודות מקסימום בתחום.} \quad \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2} \right)$$