מד"ר - הרצאה 4

14 באוגוסט 2011

מד"ר לינאריות מסדר גבוה

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,y^{'} + a_n(x)\,y = f(x)$$

אם $f(x) \equiv 0$ אזי המשוואה הומוגנית.
אם $\forall i\ a_i(x) = c_i$ קבוע אזי המשוואה נקראת מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים.

משפט

אם $y(x)$ פתרון של מד"ר לינארית הומוגנית אזי גם $c \cdot y(x)$ לכל $c \in \mathbb{R}$.

הוכחה

נציב $cy(x)$ במשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} cy^{(n)} + a_1(x)\,cy^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,cy^{'} + a_n(x)\,cy &= \\ c\left(y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,y^{'} + a_n(x)\,y\right) &= c \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

לכן $cy(x)$ פתרון של המשוואה.

משפט

אם y_1, y_2 פתרונות של מד"ר הומוגנית לינארית אזי $y_1 + y_2$ גם פתרון.

הוכחה

$$\begin{aligned} (y_1+y_2)^{(n)} + ... + a_n(x)\,(y_1+y_2) &= \\ y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + a_1 y_2^{(n-1)} + ... + a_n(x)\,y_1 + y_2 &= \\ \left(y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + ... + a_n y_1\right) + \left(y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + a_n y_2\right) &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

לכן גם $y_1 + y_2$ פתרון.

מסקנה

מרחב הפתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית הוא מרחב וקטורי.

הגדרה

שתי פונק' y_1, y_2 נקראות בת"ל אם מתקיים:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$$

כאשר $x \in D \subseteq R$.

הגדרה

הוורונסקיאן (Wronskian) של הפונק' $y_1, ..., y_n$ הוא:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1^{'} & y_2^{'} & \cdots & y_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

דוגמה

$$y_2 = \sin x,\ y_1 = e^x$$

אזי

$$W = \begin{vmatrix} e^x & \sin x \\ e^x & \cos x \end{vmatrix} = e^x(\cos x - \sin x)$$

הגדרה

$y_1, .., y_n$ תלויות לינארית אם קיימים קבועים $c_1, ..., c_n$ שלא כולם 0 כך שמתקיים:

$$c_1 y_1 + ... + c_n y_n = 0$$

משפט

אם $y_1, ..., y_n$ ת"ל אזי $W = 0$.

הוכחה

מתקיים:

$$\begin{aligned} c_1 y_1 + ... + c_n y_n &= 0 \\ c_1 y_1^{'} + ... + c_n y_n^{'} &= 0 \\ \forall k = 1...n \quad c_1 y_1^{(k)} + ... + c_n y_n^{(k)} &= 0 \end{aligned}$$

נניח $c_i \neq 0$ עבור i מסויים אזי:

$$\forall j = 1..n \quad y_i^{(j)} = -\frac{1}{c_i}\left(\sum_{k \neq i} c_k y_k^{(k)}\right)$$

לכן העמודה הj בW היא צ"ל של שאר העמודות ולכן $W = 0$.

משפט

אם $y_1, ..., y_n$ הם פתרונות של מד"ר המקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בתחום D ומתקיים $W=0$ בנק' כלשהי $x_0 \in D$ אזי הן תלויות לינארית.

הוכחה

נניח $W=0$ בנקודה x_0 אזי למערכת המשוואות

$$\begin{aligned} c_1 y_1 (x_0) + ... + c_n y_n (x_0) &= 0 \\ c_1 y_1^{'} (x_0) + ... + c_n y_n^{'} (x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} (x_0) + ... + c_n y_n^{(n-1)} (x_0) &= 0 \end{aligned}$$

יש פתרון לא טריוויאלי.
נניח $c_i \neq 0$ אזי:

$$\forall j = 1..n \qquad y_i^{(j)} (x_0) = -\frac{1}{c_i} \sum_{k \neq i} c_k y_k^{(j)} (x_0)$$

לכן y_i וכן $n-1$ הנגזרות הראשונות שלו שוות לצ"ל של הפתרונות האחרים בנק' (x_0)
אבל לפי משפט הקיום והיחידות יש רק פתרון אחד שמקיים זאת ולכן:

$$y_i (x) = \frac{1}{c_i} \sum_{k \neq i} c_k y_k (x)$$

זהותית לכל $x \in D$ כלומר הם ת"ל.

משפט ליוביל

אם $y_1 (x), ..., y_n (x)$, $x \in (a, b)$ פתרונות בת"ל של המד"ר ההומוגנית

$$y^{(n)} + a_1 (x) y^{(n-1)} + ... + a_n (x) y = 0$$

אז מתקיים:

$$W (x) = W (x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 (x) dx}$$

לכל $x_0 \in (a, b)$.

הוכחה

עבור $n=2$:

$$y^{''} + a_1 (x) y^{'} + a_2 (x) y = 0$$

אזי

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{vmatrix} = y_1 y_2^{'} - y_2 y_1^{'}$$

$$\begin{aligned}
W'(x) &= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2'y_1' - y_2y_1'' \\
&= y_1y_2'' - y_2y_1'' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1y_1' - a_2y_1 & -a_1y_2' - a_2y_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1y_1' & -a_1y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_2y_1 & -a_2y_2 \end{vmatrix} \\
&= -a_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\
&= -a_1 W(x) + 0 = -a_1 W(x)
\end{aligned}$$

קיבלנו את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$W'(x) = -a_1(x) W(x)$$

פתרונה הוא:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx}$$

דוגמה

יהיו הפונק':

$$e^{\lambda_i x},\ \lambda_i \neq \lambda_j$$

אזי

$$\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ & \vdots & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\
&= e^{\sum \lambda_i x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ & \vdots & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{\sum \lambda_i x} \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)
\end{aligned}$$

מד"ר לינארית לא הומוגנית

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_n(x) y = f(x)$$

משפט

הפתרון יהיה מהצורה:

$$y\left(x\right)=y_{g}\left(x\right)+y_{p}\left(x\right)$$

כאשר $y_{g}\left(x\right)$ הוא הפתרון הכללי של ההומוגנית המתאימה

$$y^{(n)}+a_{1}\left(x\right)y^{(n-1)}+...+a_{n}\left(x\right)y=0$$

ו$y_{p}\left(x\right)$ הוא פתרון כלשהו של הלא ההומוגנית.

הוכחה

נניח y_{p} פתרון של הלא הומוגנית ו$y_{g}\left(x\right)$ פתרון של ההומוגנית אז:

$$\begin{aligned}\left(y_{p}+y_{g}\right)^{(n)}+...+a_{n}\left(x\right)\left(y_{p}+y_{g}\right) &= \left(y_{p}^{(n)}+a_{1}y_{p}^{(n-1)}+...+a_{n}y_{p}\right)+\left(y_{g}^{(n)}+a_{1}y_{g}^{(n-1)}+...+a_{n}y_{g}\right)\\ &= f\left(x\right)+0=f\left(x\right)\end{aligned}$$

ולכן $y_{p}+y_{g}$ גם פתרון של הלא הומוגני.
בכיוון ההפוך:
אם $y_{p_{1}},\,y_{p_{2}}$ שני פתרונות של הלא-הומוגנית אזי

$$\begin{aligned}y_{p_{1}}^{(n)}+a_{1}y_{p_{1}}^{(n-1)}+...+a_{n}y_{p_{1}} &= f\left(x\right)\\ y_{p_{2}}^{(n)}+a_{1}y_{p_{2}}+...+a_{n}y_{p_{2}} &= f\left(x\right)\end{aligned}$$

נחסר את המשוואה ונקבל:

$$\left(y_{p_{1}}-y_{p_{2}}\right)^{(n)}+a_{1}\left(y_{p_{1}}-y_{p_{2}}\right)^{(n-1)}+..+a_{n}\left(y_{p_{1}}-y_{p_{2}}\right)=0$$

ולכן $y_{p_{1}}-y_{p_{2}}$ פתרון של המשוואה ההומוגנית.

הערה

לעתים נוח לכתוב את המד"ר בצורה:

$$Ly=f\left(x\right)$$

כאשר L הוא האופרטור הלינארי:

$$L=\frac{d^{n}}{dx^{n}}+a_{1}\left(x\right)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+...+a_{n}\left(x\right)$$

שיטת וריאציית הפרמטרים

נתונה המד"ר:

$$y^{'''}+a_{1}\left(x\right)y^{''}+a_{2}\left(x\right)y^{'}+a_{3}\left(x\right)y=f\left(x\right)$$

יהיו $y_{1},\,y_{2},\,y_{3}$ פתרונות בת"ל של ההומוגנית המתאימה.
הפתרון הכללי להומוגנית הוא:

$$c_{1}y_{1}\left(x\right)+c_{2}y_{2}\left(x\right)+c_{3}y_{3}\left(x\right)$$

ננחש פתרון מהצורה:

$$y\left(x\right)=c_{1}\left(x\right)y_{1}\left(x\right)+c_{2}\left(x\right)y_{2}\left(x\right)+c_{3}\left(x\right)y_{3}\left(x\right)$$

נגזור:

$$y^{'}=c_{1}y_{1}^{'}+c_{1}^{'}y_{1}+c_{2}^{'}y_{2}+c_{2}y_{2}^{'}+c_{3}y_{3}^{'}+c_{3}^{'}y_{3}$$

נניח (הצדקה בהמשך) שמתקיים:

$$c_{1}^{'}y_{1}+c_{2}^{'}y_{2}+c_{3}^{'}y_{3}=0$$

לכן:

$$y^{'}=c_{1}y_{1}^{'}+c_{2}y_{2}^{'}+c_{3}y_{3}^{'}$$

נגזור שוב:

$$y^{''}=c_{1}y_{1}^{''}+c_{1}^{'}y_{1}^{'}+c_{2}y_{2}^{''}+c_{2}^{'}y_{2}^{'}+c_{3}y_{3}^{''}+c_{3}^{'}y_{3}^{'}$$

נניח שוב:

$$c_{1}^{'}y_{1}^{'}+c_{2}^{'}y_{2}^{'}+c_{3}^{'}y_{3}^{'}=0$$

ונקבל:

$$y^{''}=c_{1}y_{1}^{''}+c_{2}y_{2}^{''}+c_{3}y_{3}^{''}$$

נגזור שוב:

$$y^{'''}=c_{1}y_{1}^{'''}+c_{1}^{'}y_{1}^{''}+c_{2}y_{2}^{'''}+c_{2}^{'}y_{2}^{''}+c_{3}y_{3}^{'''}+c_{3}^{'}y_{3}^{''}$$

$y_{1},\,y_{2},\,y_{3}$ פתרונות למד"ר, לכן נוכל להציב את המד"ר:

$$\begin{array}{rcl}
y^{'''}+a_{1}y^{''}+a_{2}y^{'}+a_{3}y & = & c_{1}^{'}y_{1}^{''}+c_{2}^{'}y_{2}^{''}+c_{3}^{'}y_{3}^{''}+\\
 & + & c_{1}y_{1}^{'''}+c_{2}y_{2}^{'''}+c_{3}y_{3}^{'''}+\\
 & + & a_{1}\left(c_{1}y_{1}^{''}+c_{2}y_{2}^{''}+c_{3}y_{3}^{''}\right)+\\
 & + & a_{2}\left(c_{1}y_{1}^{'}+c_{2}y_{2}^{'}+c_{3}y_{3}^{'}\right)+\\
 & + & a_{3}\left(c_{1}y_{1}+c_{2}y_{2}+c_{3}y_{3}\right)=f\left(x\right)
\end{array}$$

נסדר מחדש:

$$\begin{array}{rcl}
f\left(x\right) & = & c_{1}^{'}y_{1}^{''}+c_{2}^{'}y_{2}^{''}+c_{3}^{'}y_{3}^{''}+\\
 & + & c_{1}\left(y_{1}^{'''}+a_{1}y_{1}^{''}+a_{2}y_{1}^{'}+a_{3}y_{1}\right)\\
 & + & c_{2}\left(y_{2}^{'''}+a_{1}y_{2}^{''}+a_{2}y_{2}^{'}+a_{3}y_{2}\right)\\
 & + & c_{3}\left(y_{3}^{'''}+a_{1}y_{3}^{''}+a_{2}y_{3}^{'}+a_{3}y_{3}\right)
\end{array}$$

כיוון ש$y_{1},\,y_{2},\,y_{3}$ מקיימות את המשוואה ההומוגנית נקבל:

$$f\left(x\right)=c_{1}^{'}y_{1}^{''}+c_{2}^{'}y_{2}^{''}+c_{3}^{'}y_{3}^{''}$$

קיבלנו שאם c_1, c_2, c_3 מקיימים את המשוואות:

$$\begin{aligned} c_1^{'}y_1 + c_2^{'}y_2 + c_3^{'}y_3 &= 0 \\ c_1^{'}y_1^{'} + c_2^{'}y_2^{'} + c_3^{'}y_3^{'} &= 0 \\ c_1^{'}y_1^{''} + c_2^{'}y_2^{''} + c_3^{'}y_3^{''} &= f(x) \end{aligned}$$

אזי

$$c_! y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

הוא פתרון של המד"ר הלא הומוגנית.
קיבלנו את מערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1^{'} & y_2^{'} & y_3^{'} \\ y_1^{''} & y_2^{''} & y_3^{''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{'} \\ c_2^{'} \\ c_3^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

נשים לב שמתקיים:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1^{'} & y_2^{'} & y_3^{'} \\ y_1^{''} & y_2^{''} & y_3^{''} \end{vmatrix} \neq 0$$

אזי קיים פתרון אחד ויחיד למערכת.
פורמלית - בשיטת קרמר:

$$\begin{aligned} c_i^{'} &= \frac{\Delta_i}{\Delta} \\ c_i &= \int dx \left(\frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)} \right) \end{aligned}$$

דוגמה

$$y^{''} + \frac{4}{x}y^{'} + \frac{6}{x^2}y = \frac{1}{x}$$

פתרונות ההומוגנית הם:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^2 \\ y_2 &= x^3 \end{aligned}$$

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0$$

נציב בפתרון:

$$\begin{pmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{'} \\ c_2^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

נפתור:

$$\begin{aligned} c_1^{'} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ \frac{1}{x} & 3x^2 \end{vmatrix}}{W} = \frac{-x^2}{x^4} = -\frac{1}{x^2} \\ c_2^{'} &= \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \frac{1}{x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

אזי:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{x} \\ c_2 &= -\frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

הפתרון הוא:

$$\begin{aligned} y &= y_g + \frac{1}{x} \cdot x^2 - \frac{1}{2x^2} \cdot x^3 \\ &= y_g + x - \frac{x}{2} \\ &= C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

(כאשר פה C_1, C_2 קבועים).

מד"ר לינארית הומוגנית\לא הומוגנית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_n y = f(x)$$

מד"ר כזו תיקרא מד"ר עם מקדמים קבועים אם $p_1, ..., p_n$ הם קבועים ב$\mathbb{R}$.
ננחש פתרון מהצורה:

$$\begin{aligned} y &= e^{rx} \\ y^{'} &= re^{rx} \\ y^{(m)} &= r^m e^{rx} \end{aligned}$$

נציב במד"ר ההומוגנית:

$$\begin{aligned} r^n e^{rx} + p_1 r^{n-1} e^{rx} + ... + p_n e^{rx} &= 0 \\ e^{rx}\left(r^n + p_1 r^{n-1} + ... + p_n\right) &= 0 \end{aligned}$$

הפולינום

$$r^n + p_1 r^{n-1} + ... + p_n$$

נקרא הפולינום האופייני של המד"ר.
קיבלנו שאם r הוא שורש של הפולינום האופייני אזי e^{rx} פותר את המד"ר.
אם יש n פתרונות ממשיים שונים $r_1, .., r_n$, אזי הפתרון הכללי למד"ר ההומוגנית הוא:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}$$

אם יש זוג פתרונות מרוכבים צמודים $r=\alpha\pm i\beta$ אזי

$$c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{c_1}e^{(\alpha-i\beta)x} = \widetilde{c_1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)+\widetilde{c_2}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

אם $r_1,\,...,\,r_n$ הם פתרונות הפולינום ניתן לכתוב את המשוואה בצורה:

$$\left(\frac{d}{dx}-r_1\right)\left(\frac{d}{dx}-r_2\right)...\left(\frac{d}{dx}-r_n\right)y=0$$

אם r שורש כפול אז:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}-r\right)\left(\frac{d}{dx}-r\right)xe^{rx} &= \left(\frac{d}{dx}-r\right)\left[e^{rx}+rxe^{rx}-rxe^{rx}\right]\\ &= \left(\frac{d}{dx}-r\right)e^{rx}=0\end{aligned}$$

לכן אם יש שורש כפול אז גם xe^{rx} פתרון של המשוואה.
בכלליות, אם r שורש עם ריבוי m אז $x^\ell e^{rx}$ פתרון עבור $\ell=0,\,1,\,...,\,m-1$.
אם יש שורש מרוכב $r=\alpha+i\beta$ עם ריבוי m, אזי $x^\ell e^{(\alpha\pm i\beta)x}$ או $x^\ell e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ו$x^\ell e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ פתרונות עבור $\ell=0,\,..,\,m-1$.
באופן כללי, אם יש לנו פתרונות $r_1,\,..,\,r_m$ בריבויים $q_1,\,...,\,q_m$ אזי הפתרון הוא:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{q_i-1}c_{ij}x^je^{r_ix}$$

כאשר c_{ij} קבועים שרירותיים.
אם 0 הוא שורש של הפולינום האופייני בריבוי q_0 אזי כל פולינום עד דרגה q_0-1 הוא פתרון.

דוגמה

$$y^{(5)}-2y^{(4)}+y^{(3)}=0$$

הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}r^5-2r^4+r^3 &= 0\\ r^3\left(r^2-2r+1\right) &= 0\\ r^3\left(r-1\right)^2 &= 0\end{aligned}$$

קיבלנו שהשורשים הם $r=0$ בריבוי 3 ו$r=1$ בריבוי 2.
הפתרונות שאנחנו מקבלים הם:

$$r=0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix}1\\ x\\ x^2\end{matrix}$$

$$r=1 \;\Rightarrow\; \begin{matrix}e^x\\ xe^x\end{matrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y=c_1+c_2x+c_3x^3+c_4e^x+c_5xe^x$$

שיטות למציאת y_p: שיטת הניחוש\בחירה\המקדמים הנעל-מים

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_ny=P_mx$$

כאשר P_m פולינום מדרגה m.
אם 0 אינו שורש של הפולינום האופייני של המשוואה, ננחש פתרון מהצורה:

$$a_0+a_1x+...+a_mx^m$$

נציב ונקבל מערכת משוואות לינאריות עבור $a_0,..,a_m$ כאשר כל המקדמים חייבים להתאפס.

דוגמה

$$y^{''}-y=x^2+3$$

הפולינום האופייני הוא:

$$\begin{aligned} r^2-1 &= 0 \\ r &= \pm 1 \\ y_g &= c_1e^x+c_2e^{-x} \end{aligned}$$

0 אינו שורש לכן ננחש:

$$\begin{aligned} y_p &= a_0+a_1x+a_2x^2 \\ y_p^{'} &= a_1+2a_2x \\ y_p^{''} &= 2a_2 \end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$2a_2-a_0-a_1x-a_2x^2=x^2+3$$

קיבלנו את המערכת:

$$\begin{aligned} 2a_2-a_0 &= 3 \\ -a_1 &= 0 \\ -a_2 &= 1 \end{aligned}$$

מכאן קיבלנו:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= -1 \\ a_0 &= -5 \end{aligned}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y_p=-x^2-5$$

והפתרון הכללי למשוואה הוא:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}-x^2-5$$

הערה

אם 0 שורש בריבוי h ננחש פתרון מהצורה

$$x^h\left(a_0+a_1x+...+a_mx^m\right)$$

דוגמה

$$y^{''}-y^{'}=x+1$$

הפולינום האופייני הוא:

$$\begin{aligned} r^2-r &= 0 \\ r &= 0,1 \\ y_g &= c_0+c_1e^x \end{aligned}$$

0 הוא שורש לכן ננחש פתרון:

$$\begin{aligned} y_p &= x\left(a_0+a_1x\right)=a_0x+a_1x^2 \\ y_p^{'} &= a_0+2a_1x \\ y_p^{''} &= 2a_1 \end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$2a_1-a_0-2a_1x=x+1$$

מכאן נקבל:

$$\begin{aligned} 2a_1-a_0 &= 1 \\ -2a_1 &= 1 \end{aligned}$$

נפתור:

$$\begin{aligned} a_0 &= -2 \\ a_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

לכן הפתרון הוא:

$$y=c_0+c_1e^x-2x-\frac{1}{2}x^2$$

שיטת הניחוש - אקספוננט כפול פולינום

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+...+p_ny=e^{\alpha x}\cdot P_m\left(x\right)$$

אם α איננו שורש של הפולינום האופייני ננחש פתרון מהצורה:

$$Q_m\left(x\right)e^{\alpha x}$$

כאשר

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$$

אם α שורש בריבוי k של הפולינום האופייני ננחש פתרון מהצורה:

$$x^k Q_m(x) e^{\alpha x}$$

(זה מקרה כללי של המקרה הקודם שמתקבל כאשר $\alpha = 0$).

שיטת הניחוש - מקרה נוסף

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = e^{\alpha x} \cdot \begin{Bmatrix} \sin\beta x \\ \cos\beta x \end{Bmatrix} P_m(x)$$

אם $\alpha \pm i\beta$ לא שורש ננחש פתרון מהצורה:

$$Q_{m_1}(x) e^{\alpha x} \cos\beta x + Q_{m_2}(x) e^{\alpha x} \sin\beta x$$

אם $\alpha \pm i\beta$ שורשים מריבוי k (כ"א) אז ננחש פתרון:

$$x^k \left[Q_{m_1}(x) e^{\alpha x} \cos\beta x + Q_{m_2}(x) e^{\alpha x} \sin\beta x\right]$$

(זה למעשה המקרה הקודם אם מרשים α מרוכב).

כלל

בגלל הלינאריות של הפתרונות, אם יש לנו את המשוואה:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x) + g(x)$$

אז נוכל לפתור עבור $f(x)$ ו$g(x)$ בנפרד ולסכם את הפתרונות.

דוגמה

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\alpha x \\ x &= c_1 \cos\left(\sqrt{\alpha} x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\alpha} x\right) = A \cos\left(\sqrt{\alpha} t + \varphi\right) \end{aligned}$$

נפתור בשיטת הניחוש:

$$\ddot{x} + \alpha x = 0$$

הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned} r^2 + \alpha &= 0 \\ r &= \pm i\sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

לכן

$$y_g = c_1 e^{i\sqrt{\alpha} t} + c_2 e^{-i\sqrt{\alpha} t}$$

דוגמה

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\alpha x - \lambda\dot{x},\ \lambda > 0\\ \ddot{x} + \lambda\dot{x} + \alpha x &= 0\\ r^2 + \lambda r + \alpha &= 0\\ r &= \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha}}{2}\end{aligned}$$

נחלק למקרים:

.1

$$\lambda^2 - 4\alpha < 0$$

אזי

$$y = e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4\alpha - \lambda^2}}{2} t + \varphi\right)$$

.2

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 4\alpha &> 0\\ y &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}\\ r_1, r_2 &< 0\end{aligned}$$

"ריסון על".

.3

$$\lambda^2 = 4\alpha$$

לכן הפתרון הכללי:

$$y = c_1 e^{-\frac{\lambda}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{\lambda}{2}t}$$

תנודות מאולצות

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\alpha x + \cos\omega t\\ x_g &= A\cos\left(\sqrt{\alpha} t + \varphi\right)\end{aligned}$$

שורשי הפולינום האופייני הם $\pm i\sqrt{\alpha}$. אם $\omega \neq \pm i\sqrt{\alpha}$ אז ננחשב פתרון מהצורה:

$$x_p = a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t$$

נציב ונקבל:

$$-a_1\omega^2 \cos\omega t - a_2\omega^2 \sin\omega t = -\alpha a_1 \cos\omega t - \alpha a_2 \sin\omega t + \cos\omega t$$

נפתור מערכת משוואות עבור המקדמים:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_1 &= \frac{1}{\alpha-\omega^2} \end{aligned}$$

לכן הפתרון שלנו הוא:

$$x = A\cos\left(\sqrt{\alpha}t+\varphi\right) + \frac{1}{\alpha-\omega^2}\cos\left(\omega t\right)$$

אם $\alpha=\omega^2$ אז ננחש פתרון מהצורה:

$$\begin{aligned} x_p &= a_1 t\cos\omega t + a_2 t\sin\omega t \\ \dot{x}_p &= a_1\cos\omega t - a_1\omega t\sin\omega t + a_2\sin\omega t + a_2\omega t\cos\omega t \\ \ddot{x}_p &= \omega a_1\sin\omega t - a_1\omega\sin\omega t - a_1\omega^2 t\cos\omega t + a_2\omega\cos\omega t + \\ &+ a_2\omega\cos\omega t - a_2\omega^2\sin\omega t \end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} -2\omega a_1\sin\omega t &- a_1\omega^2 t\cos\omega t + 2\omega a_2\cos\omega t \\ &- a_2\omega^2 t\sin\omega t \\ &= -\alpha\left(a_1 t\cos\omega t + a_2 t\sin\omega t\right) + \cos\omega t \end{aligned}$$

אזי:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{1}{2\omega} \end{aligned}$$

נקבל שהפתרון הוא:

$$x = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t + \frac{1}{2\omega}\sin\omega t$$