88-112 סמסטר א תשע"ז מועד א

שאלה 1. נסח והוכח את משפט המימדים לתת מרחבים וקטורים.

פתרון. בסיכומי הרצאות.

שאלה 2. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ ויהי $B = \{1, 1+x^2, x+x^2\}$ תת קבוצה של המרחב הוקטורי $\mathbb{R}_2[x]$.

א. הוכח כי B בסיס ל $\mathbb{R}_2[x]$.

ב. מצא במפורש הע"ל $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ כך ש $[T]_B^B = A$.

ג. האם ההעתקה שמצאת חח"ע? על? מצא בסיס ומימד עבור $KerT, ImT$.

פתרון.

א. נוכיח ש B בת"ל: נשים את מקדמי הפולינומים במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בכל עמודה יש איבר מוביל, לכן לפי טענה שראינו, הקבוצה בת"ל.
(למי שלא זוכר למה הטענה נכונה: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש

$$a \cdot 1 + b \cdot (1+x^2) + c \cdot (x+x^2) = 0$$

אזי אחרי פתיחת סוגריים:

$$(a+b) + c \cdot x + (b+c) \cdot x^2 = 0$$

לפי שיוויון פולינומים מקבלים מערכת הומוגנית של שלוש משוואות לינאריות:

$$\begin{gathered} a+b=0 \\ c=0 \\ b+c=0 \\ \Downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \end{gathered}$$

ופותרים את מערכת המשוואות על ידי דירוג (אותו דירוג ממקודם). מכייוון שבכל עמודה יש איבר מוביל, כלומר, אין איברים חופשיים, קיים פתרון יחיד, והוא הפתרון הטריוואלי.
בסך הכל קיבלנו שכל צירוף לינארי של איברי B שמתאפס חייב להיות הצירוף הטריוואלי, לכן לפי הגדרה, B בת"ל כפי שרצינו).
נמשיך לפתור: ידוע שהמימד של $\mathbb{R}_2[x]$ הוא 3 (לפי הבסיס הסטדנרטי, שכבר הוכחנו עליו שהוא באמת בסיס), ולכן לפי משפט "השלישי חינם" מקבלים ש B בסיס.

ב. כפי שראינו בתרגולים, יש כמה דרכים לפתור את הסעיף הזה. נפתור בדרך אחת:
נסמן ב E את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$. אזי:

$$A = [T]_B^B = [I]_B^E \cdot [T]_E^E \cdot [I]_E^B$$

$$\Downarrow$$

$$[T]_E^E = \left([I]_B^E\right)^{-1} \cdot A \cdot \left([I]_E^B\right)^{-1} = [I]_E^B \cdot A \cdot \left([I]_E^B\right)^{-1}$$

נחשב את $[I]_E^B$:

$$[I]_E^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [1]_E & \left[1+x^2\right]_E & \left[x+x^2\right]_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נשתמש באלגוריתם להפיכת מטריצה באמצעות דירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left([I]_E^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ובסך הכל:

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \\ 13 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 9 & 8 & -3 \\ 13 & 11 & -4 \end{pmatrix}$$

מתקיים לכל $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$:

$$[T(p)]_E = [T]_E^E \cdot [p]_E = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 9 & 8 & -3 \\ 13 & 11 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+5b-2c \\ 9a+8b-3c \\ 13a+11b-4c \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$T(a+bx+cx^2) = (5a+5b-2c) + (9a+8b-3c)x + (13a+11b-4c)x^2$$

ג. נתחיל בגרעין:
יהיה $p(x)=a+bx+cx^2 \in KerT$. אזי $[p]_E \in N\left([T]_E^E\right)$. כלומר:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 9 & 8 & -3 \\ 13 & 11 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

נפתור באמצעות דירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 9 & 8 & -3 & 0 \\ 13 & 11 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 9 & 8 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 20 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$N\left([T]_E^E\right) = span\left(\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$KerT = span\left(\left\{-1+3x+5x^2\right\}\right), dimKerT = 1$$

בפרט, T אינה חח"ע.
נמצא בסיס לתמונה:
לכל $p \in ImT$, $[p]_E \in C([T]_E^E)$. לכן נמצא בסיס למרחב העמודות. ראינו שאחרי דירוג יש איברים מובילים בעמודה הראשונה והשניה בלבד, לכן אם ניקח את העמודות הראשונה והשניה במטריצה המקורית, נקבל בסיס למרחב העמודות:

$$\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}\right\}$$

והפולינומים המתאימים יהוו בסיס למרחב התמונה:

$$\left\{5+9x+13x^2, 5+8x+11x^2\right\}, dimImT = 2$$

ובפרט T אינה על.

שאלה 3. יהי $V = M_{3x3}(\mathbb{R})$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $S: V \to V$ העתקה המוגדרת לפי:

$$S(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

א. הוכח כי S העתקה לינארית.

ב. מצא בסיס ומימד עבור $Ker(S), Im(S)$.

ג. הוכח כי $V = KerS \oplus ImS$.

ד. יהיו B_1 הבסיס שמצאת עבור $KerS$ ו B_2 הבסיס שמצאת עבור ImS. נגדיר $B = B_1 \cup B_2$. הוכח כי B בסיס עבור V.

ה. חשוב על B כעל בסיס סדור וחשב את $[S]_B^B$.

פתרון.

א. יהיו $A, B \in V, \alpha \in \mathbb{R}$. אזי:

$$S(A+\alpha B) = \frac{1}{2}((A+\alpha B)+(A+\alpha B)^T) = \frac{1}{2}(A+\alpha B+A^T+\alpha B^T) =$$

$$= \frac{1}{2}(A+A^T)+\alpha\frac{1}{2}(B+B^T) = S(A)+\alpha S(B)$$

ב. נתחיל בגרעין:
אם $A \in KerS$, אזי:

$$A + A^T = 0$$

כלומר A אנטי-סימטרית, וגם ההיפך הוא נכון: אם A אנטי-סימטרית, אזי $S(A) = 0$ ו A בגרעין.
לכן הגרעין שווה בדיוק למרחב המטריצות האנטי-סימטריות, והקבוצה הבאה היא בסיס עבורו:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, dimKerS = 3$$

(קל לבדוק שהקבוצה בת"ל ופורשת).
עכשיו התמונה:
נשים לב שלכל מטריצה A:

$$S(A)^T = (\frac{1}{2}(A+A^T))^T = \frac{1}{2}(A^T+(A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T+A) = S(A)$$

כלומר, כל איבר במרחב התמונה הוא מטריצה סימטרית.
וגם ההיפך הוא הנכון! אם C מטריצה סימטרית, אזי:

$$S(C) = \frac{1}{2}(C+C^T) = \frac{1}{2}(C+C) = \frac{1}{2}\cdot 2C = C$$

כלומר, C נמאת במרחב בתמונה. כלומר, מרחב התמונה שווה בדיוק למרחב כל המטריצות הסימטריות, וזה בסיס עבורו:

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$dimImS = 6$$

(גם כאן קל לראות שהקבוצה בת"ל ופורשת).

ג. נראה כי החיתוך של שני המרחבים האלו טריוואלי:
תהי $A \in KerS \cap ImS$. אזי A גם סימטרית וגם אנטי סימטרית. כלומר: $A^T = A$ וגם $A^T = -A$. בפרט $A = -A \Longleftarrow 2A = 0 \Leftarrow A = 0$, כפי שרצינו.
כעת, סכום המימדים של המרחבים שווה למימד של V (לפי משפט המימדים, או לפי חישוב ישיר), לכן לפי טענה שראינו, מקבלים את הדרוש:

$$V = KerS \oplus ImS$$

ד. $B = B_1 \cup B_2$. נשים לב ש B קבוצה פורשת, כי:

$$KerS = span(B_1) \subseteq span(B_1 \cup B_2) = span(B)$$

$$ImS = span(B_2) \subseteq span(B_1 \cup B_2) = span(B)$$

ולכן

$$V = KerS + ImS \subseteq span(B)$$

כלומר, B קבוצה פורשת.
בנוסף, הגודל של B שווה לגודל של המימד של V, לכן לפי משפט "השלישי חינם", B בסיס.

ה. נשים לב שלכל $v \in B_1$, $S(v) = 0$, ולכן $[S(v)]_B = 0$. לכל $v \in B_2$, $S(v) = v$, ולכן אם v הוא הוקטור במקום ה-i בבסיס B מקבלים ש: $[S(v)]_B = e_i$. לכן בסך הכל, אם מסדרים איברי הבסיס B כך שאיברי B_1 מופיעים ראשונים ורק אחר כך מופיעים איברי B_2, מקבלים:

$$[S]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 4. הוכח או הפרך

א. יהי V מרחב וקטורי ויהיו $u, v, w \in V$ שלושה וקטורים בלתי תלויים לינארית, אז הקבוצה $A = \{v + u, v + w, u + w\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. תהיינה B_1, B_2 שתי קבוצות בלתי תלויות לינארית כך ש $B_1 \cap B_2$, אז $B_1 \cup B_2$ גם בלתי תלויה.

ג. תהי $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ מטריצה כך שלמערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש פתרון לא טריוואלי, אז קיים וקטור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כך שלמערכת הלא הומגנית $Ax = v$ אין פתרון.

ד. יהי $V = \mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ העתקה המוגדרת לפי $T(v) = \bar{v}$, אז T העתקה לינארית.

פתרון.

א. **נכון!**

הוכחה: יהי $\alpha(v+u)+\beta(v+w)+\gamma(u+w)=0$ צירוף לינארי מאפס של איברי הקבוצה A. אזי:

$$(\alpha+\beta)v+(\alpha+\gamma)u+(\beta+\gamma)w=0$$

אבל v,u,w בלתי תלויים, לכן $\alpha+\beta=\alpha+\gamma=\beta+\gamma=0$. כלומר:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0$$

אחרי דירוג רואים שהמטריצה הפיכה, לכן בפרט קיים פתרון יחיד בלבד למערכת, והוא הפתרון הטריוואלי, לכן $\alpha=\beta=\gamma=0$, כלומר, הקבוצה A בת"ל.

ב. **לא נכון!**

הפרכה: ניקח $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$. הקבוצות בלתי תלויות, זרות, אבל האיחוד שלהן כמובן אינו בת"ל (כי קבוצה בלתי תלויה צריכה לקיים שגודלה קטן מהמימד, אבל המימד של V הוא 2).

ג. **נכון!**

הוכחה: אם למערכת ההומוגנית קיים פתרון לא טריוואלי, אזי מימד מרחב האפס של המטריצה ($dimN(A)$) גדול או שווה 1. לפי משפט הדרגה עבור מטריצות, מקבלים ש $dimC(A)=rank(A)\leq 2-1=1<2=dim\mathbb{R}^2$. מתקיים $C(A)\subseteq\mathbb{R}^2$, לכן לפי טענה שראינו, $C(A)\subsetneq\mathbb{R}^2$. בפרט קיים וקטור $v\in\mathbb{R}^2$ שאינו ב $C(A)$, כלומר לא קיים פתרון למערכת $Ax=v$.

ד. **לא נכון!**

הפרכה: נבחר $v=i\in V,\alpha=i\in\mathbb{C}$. אזי:

$$T(\alpha v)=T(i\cdot i)=T(-1)=-1\neq 1=i\cdot(-i)=i\cdot T(i)=\alpha T(v)$$

ולכן T אינה העתקה לינארית.

בהצלחה!