

מד"ר , תרגול 7

21 בינואר 2014

מערכת משוואות לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

אם נתונה מערכת משוואות מהצורה

$$\begin{cases} x'_1 &= a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ \vdots & \\ x'_n &= a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases}$$

נגדיר:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ניתן לרשום את המערכת באופן הבא:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A \cdot \vec{x} \\ A &= (a_{ij}) \end{aligned}$$

נחפש פתרון מהצורה $\vec{x} = e^{\lambda t} \vec{v}$. נציב במשוואה

$$\vec{x}' = \lambda e^{\lambda t} \vec{v}$$

ולכן

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} : / \lambda e^{\lambda t} \vec{v} &= A e^{\lambda t} \vec{v} \\ A \vec{v} &= \lambda \vec{v} \end{aligned}$$

ולכן \vec{v} הוא ו"ע של A עם ע"ע λ . ישנם שלושה מקרים:

מקרה א': כל הע"ע שונים וממשיים ואז הפתרון הוא מהצורה $\vec{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_n$ כאשר λ_i ע"ע ו- \vec{v}_i הו"ע המתאימים להם.

דוגמה 1:

פתרו

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

פתרון: נרשום במטריצה:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

נחפש ע"ע:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) &= 0 \\ \lambda_{1,2,3} &= 0, 2, -1 \end{aligned}$$

נמצא ע"ע:
 $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ v_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ v_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אז הפתרון הוא

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מקרה ב': אם הע"ע מרוכבים אז עבור כל ע"ע נקבל גם את הצמוד שלו. על מנת למצוא ו"ע ממשיים מפרידים בין החלק הממשי למדומה ויוצרים וקטורים חדשים.

דוגמה 2: פתור:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 - x_2 \end{cases}$$

פתרון: נרשום במטריצה

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

נחפש ע"ע:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{1 - 20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

נמצא ו"ע עבור $\lambda_1 = 1 + 2i$:

$$\begin{pmatrix} 2 - 2i & 2 \\ 4 & -2 - 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1 - i)a - b &= 0 \\ 2a - (1 + i)b &= 0 \end{aligned}$$

אפשר לראות כי השורות ת"ל ולכן

$$b = (1 - i)a$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$$

הוקטור העצמי שמתאים לע"ע λ_2 יהיה צמוד ל \vec{v}_1 :

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

אז הפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

הערה: על מנת לקבל ו"ע ממשים, מפרידים בין ממשי למרוכב

$$y = c_1 e^t e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + c_2 e^t e^{-2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = c_1 e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + c_2 e^t (\cos(2t) - i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

נמשיך ע"י הפרדת הוקטורים:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (c_1 + c_2) e^t \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c_1 - c_2) i e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t + c_1 e^t \cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \\ &\quad + i c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \sin 2t + c_2 e^t \cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} - i c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \sin 2t \\ &= (c_1 + c_2) e^t \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c_1 - c_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \sin 2t - c_1 e^t i \cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad - c_1 e^t \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t i \cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - c_2 e^t \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \\ c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מקרה ג':

אין ו"ע לכל ע"ע. במקרה זה נחפש פתרון נוסף מהצורה $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix}$ כאן הריבוי האלגברי של הע"ע גדול יותר כלומר יש יותר ע"ע מו"ע).

דוגמה 3: פתור:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

פתרון: ניתן לראות בקלות שהע"ע הם $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. עבור $\lambda_{1,2} = 1$:
 $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \cdot$ נחפש פתרון נוסף מהצורה $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 2$ ועבור $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$
 כאשר דרגת הפולינום P_i קטנה ב-1 מהריבוי האלגברי של הע"ע. לכן מחפשים
 $\begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix}$
 פיתרון מהצורה $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \\ c_0 + c_1 t \end{pmatrix}$ כדי למצוא את המקדמים נציב במשוואה
 הני"ל:

$$x_1'(t) = a_0 e^t + a_1 e^t + a_1 t e^t = e^t a_1 (1+t) + a_0 e^t$$

נציב במשוואה המקורית ונקבל:

$$e^t \begin{pmatrix} a_1(1+t) + a_0 \\ b_1(1+t) + b_0 \\ c_1(1+t) + c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \\ c_0 + c_1 t \end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת ונקבל:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ b_1 &= -4a_0 \\ c_0 &= 24a_0 - 6b_0 \\ c_1 &= 24a_0 \end{aligned}$$

נקבל שהפיתרון הנוסף עבור $\lambda = 1$ הוא

$$\vec{x}(t) = e^t a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -4t \\ 24t + 24 \end{pmatrix} + e^t b_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\vec{x}(t) = e^t a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -4t \\ 24t + 24 \end{pmatrix} + e^t b_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + c e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מערכות משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים

עד עכשיו השתמשנו בשיטה של ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים. שיטה נוספת לפיתרון היא דרך הקטנת מימד.

שיטה ב' - הקטנת מימד משתמשים בשיטה זו כאשר נתון אחד הפתרונות וצריך למצוא את האחרים. נתונה מערכת המשוואות $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ ונתון פתרון $\vec{x}_0(t) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \vdots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}$. נרצה למצוא $(n-1)$ פתרונות נוספים. נקבל אותם ע"י החלפת משתנים:

$$y_k = x_k - \frac{x_k^0}{x_n^0} x_n$$

$$y_n = \frac{1}{x_n^0} x_n$$

דוגמה 4: נתון $t > 0$:

$$\begin{cases} tx_1' = 2x_1 - x_2 \\ tx_2' = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

1. הראה שיש למערכת פתרון לא טריוויאלי שבו $x_1 = x_2$.

2. בנה משפחה בסיסית של פתרונות.

פתרון:

1. נניח $x_1 = x_2$ אז נקבל:

$$\begin{aligned} tx_1' &= x_1 \\ \frac{x_1'}{x_1} &= \frac{1}{t} \\ \ln x_1 &= \ln t + c \\ x_1 &= c \cdot t \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

פתרון כדרוש.

2. נשתמש בהקטנת מימד. במקרה שלנו $n = 2$. נסמן $\begin{cases} x_1' = \frac{2}{t}x_1 - \frac{x_2}{t} \\ x_2' = \frac{3}{t}x_1 - \frac{2}{t}x_2 \end{cases}$.

$$y_1 = x_1 - \frac{t}{t}x_2 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = \frac{1}{t}x_2$$

ננסה להוריד את המימד של המשוואה המקורית ע"י ההצבות הנ"ל כלומר

$$\begin{aligned}y_1' &= x_1' - x_2' = \frac{2}{t}x_1 - \frac{1}{t}x_2 - \frac{3}{t}x_1 + \frac{2}{t}x_2 \\ &= -\frac{1}{t}x_1 + x_2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{-1}{t}(x_1 - x_2) = \frac{-1}{t}y_1 \\ y_2' &= \frac{x_2' \cdot t - x_2}{t^2} = \frac{1}{t}x_2' - \frac{x_2}{t^2} = \\ &= \frac{3}{t^2}x_1 - \frac{2}{t} \cdot x_2 - \frac{1}{t^2}x_2 = \\ &= \frac{3}{t^2}(x_1 - x_2) = \frac{3}{t^2}y_1\end{aligned}$$

קיבלנו מערכת משוואות:

$$\begin{aligned}y_1' &= \frac{-y_1}{t} \\ y_2' &= \frac{3}{t^2}y_1\end{aligned}$$

נפתור:

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{c}{t} \\ y_2 &= \int \frac{3}{t^2} \cdot \frac{c}{t} dt = \frac{-3c}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + c_2\end{aligned}$$

נחזור ל λ_1, λ_2 :

$$x_1(t) = y_1 + ty_2 = \frac{c}{t} - \frac{3c}{2t} + c_2t$$

$$x_2(t) = ty_2 = \frac{-3c}{2t} + c_2t$$

שיטת חילוץ והצבה

דוגמה 5:

$$\begin{cases}x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 5x_1 + 3x_2\end{cases}$$

פתרון: נחלץ לדוגמה מהמשוואה הראשונה את x_2 :

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{x_1 - x_1'}{2} \\x_2' &= \frac{x_1' - x_1''}{2} \\ \frac{x_1' - x_1''}{2} &= 5x_1 + \frac{3x_1 - 3x_1'}{2}\end{aligned}$$

קיבלנו מד"ר מסדר שני עם מקדמים קבועים:

$$x_1'' - 4x_1' + 13x_1 = 0$$

נפתור את המשוואה האופיינית ונקבל $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$ ולכן:

$$x_1(t) = e^{2t} \cdot (c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t))$$

נציב את הפתרון במשוואה הראשונה:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 2e^{2t} \cdot (c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)) + e^{2t} \cdot (-3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t) \\x_2(t) &= \frac{x_1 - x_1'}{2} = \frac{e^{2t}}{2} \cdot [(-3c_2 - c_1) \cdot \cos 3t + (3c_1 - c_2) \cdot \sin 3t]\end{aligned}$$

הערה: כתוצאה משיטת החילוץ אפשר לקבל שיטה לפתרון מערכות הומוגניות במקדמים קבועים. השיטה הזו אמנם לא יעילה אבל במקרה שהמטריצה לא לכסינה זאת השיטה היחידה לפתרון המערכת.