# מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 7 (פתרון)

1. <u>א'</u> אם $X = \emptyset$ אז $X' = \{p\}$ קשיר, מש"ל.
אם $X \neq \emptyset$ אז:
(1) $\emptyset \in \tau'$ ו- $X' = X \cup \{p\} \ni \tau'$.
(2) יהי $\bigcup_\alpha U'_\alpha$ איחד קבוצות פתוחות מ- $\tau'$. אם הן כולם ריקות אזי האיחוד ריק ושייך ל- $\tau'$.
אם בתוכם יש קבוצה מסוג $U \cup \{p\}, U \in \tau \wedge U \neq \emptyset$
אזי גם האיחרד בעצמו מאותו סוג ולכן שייך ל- $\tau'$.
(3) $U'_1 \cap \dots \cap U'_n$ קבוצה ריקה אם לפחות אחת מ-$U'_i$ ריקה. אם כל הקבוצות $U'_i$ אינן ריקות אז כולן מסוג $U_i \cup \{p\}, U_i \in \tau \wedge U_i \neq \emptyset$ ולכן
$U'_1 \cap \dots \cap U'_n = (U_1 \cap \dots \cap U_n) \cup \{p\} \in \tau'$

<u>ב'</u> לכל זוג $\mathrm{U}', \mathrm{V}'$ פתוחות מ- $\tau'$ ולא ריקות מתקיים: $p \in \mathrm{U}' \cap \mathrm{V}' \neq \emptyset$. לכן $(X', \tau')$ קשיר, מש"ל.

2. יהי – בדרך השלילה – $B$ לא קשיר, אז קיימות $U, V$ פתוחות כך ש-$U \cup V \supseteq B$ ו-$U \cap V \cap B = \emptyset$ ו- $U \cap B \neq \emptyset$ ו- $V \cap B \neq \emptyset$ (*)
אזי $U \cup V \supseteq A$ ו- $U \cap V \cap A = \emptyset$ ובגלל הקשירות של $A$: $U \cap A = \emptyset$ או $V \cap A = \emptyset$ (**)
אזי $U \cap \bar{A} = \emptyset$ או $V \cap \bar{A} = \emptyset$ (***)

כי אחרת – גם ב-$U$ וגם ב- $V$ ישנן נקודה מ- $\bar{A}$ ואז גם מ- $A$ שסותר ל-(**).
אבל הטענות (***) ו- (*) סותרות זו לזו.

3. יהיה $f\colon X \to Y$ הומאומורפיזם בין מ"ט $X$ ו- $Y$.
נניח ש-$X$ קשיר מסילתית ונוכיח גם $Y$ קשיר מסילתית.
<u>הוכחה.</u> יהיו $y_0, y_1 \in Y$. אזי אם נתבונן בנקודות
$x_0 = f^{-1}(y_0), x_1 = f^{-1}(y_1) \in X$
קיימת פונקציה $\varphi\colon [0,1] \to X$ רציפה כך
ש- $\varphi(0) = x_0$ ו- $\varphi(1) = x_1$ ולכן
$f\big(\varphi(0)\big) = f(x_0) = y_0$ ו- $f\big(\varphi(1)\big) = f(x_1) = y_1$
אם נסמן $\psi = f \circ \varphi$ אז $\psi\colon [0,1] \to Y$ רציפה כהרכבת הרציפות ו- $\psi(0) = y_0$ ו- $\psi(1) = y_1$ שמוכיח
<u>ש- $Y$ קשיר מסילתית.</u>■
הוכחה בכיוון הפוך היא אותה ההוכחה רק צריך להחליף פונקציה $f$ ל- $f^{-1}$ ולהפך.

4. <u>א'</u> המרחב אינו קשיר כי אפשר להציג אותו כאיחוד של שלוש תת-קבוצות פתוחות ולא נחתכות:

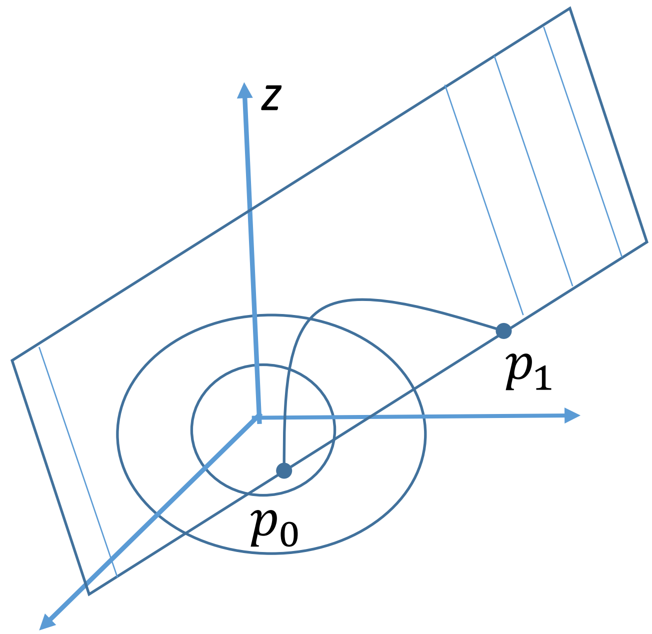
$$\boldsymbol{X} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 |\, \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 < \boldsymbol{1}\} \cup$$

$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 |\, \boldsymbol{1} < \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 < \boldsymbol{2}\} \cup$$

$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 |\, \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 > \boldsymbol{2}\}$$

ואזי המרחב אינו קשיר מסילתית.

<u>ב'</u>




המרחב $X$ מכיל את כל הנקודות מ-$\mathbb{R}^3$ חוץ משני מעגלים הנמצאים במישור $z = 0$. אם נקח שתי נקודות $p_0, p_1 \in X$ אז ישנם שלושה מקרים אפשריים:

(1) לפחות אחת מהנקודות לא נמצאת במישור $z = 0$. אז ברור שאפשר לחבר את הנקודות על ידי קטע ישר שלא חותך את המעגלים.

(2) שתי מהנקודות נמצאת במישור $z = 0$ אבל הקטע הישר בינהן לא חותך את המעגלים.

(3) שתי מהנקודות נמצאת במישור $z = 0$ והקטע הישר בינהן חותך אחד או שניים מהמעגלים.

מקורס גאומטריה אנליטית ידוע שאפשר להציג את הקטע $[p_0, p_1] \subseteq \mathbb{R}^3$ כתמונה של פונקציה $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}^3$ כך ש-

$$\varphi(t) = p_0 + t\vec{e}$$

ו- $\varphi(1) = p_0 + \vec{e} = p_1$. קל לראות ש-$\varphi$ רציפה. במקרים 1-2 זה מוכיח את הקשירות המסילתית.
במקרה 3 צריך לקחת את המישור $P$ המאונך למישור $z = 0$ ועובר דרך הקטע $[p_0, p_1]$. לאחר מכן צריך להחליף את הקטע הישר לקשת של עקום אחר כך שכל הקשת מוכלת במישור $P$ ורק בקצוותיה חותכת את המישור $z = 0$. (זה יכול להיות קשת של מעגל או של פרבולה. ראה את הציור לעיל). $\varphi$ במקרה זה צריך לקבל מהמשוואה של העקום.

בכל שלושת המקרים מצאנו מסילה בין נקודות ואז הוכחנו קשירות מסילתית של $X$.

5. $\underline{\Rightarrow}$ יהי המרחב סופי. אזי כל הקבוצה של תת-קבוצות שלו סופיות. אזי כל כיסוי פתוח שלו סופי, מש"ל.
$\underline{\Leftarrow}$ יהי המרחב קומפקטי. כיוון שהוא דיסקרטי כל נקודון $\{x\}$ בו קבוצה פתוחה. לכן האוסף של כל הנרודונים הוא כיסוי פתוח. ובזכות הקומפקטיות מכיל תת-כיסוי- של נרודונים - סופי. לכן המרחב סופי, מש"ל.

6. א' נניח – בדרך השלילה – ש- $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha = \emptyset$. אזי
לפי חוקי דה מורגן: $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha^c = X$, ז"א $\{K_\alpha^c\}_{\alpha\in\Lambda}$
- כיסוי פתוח של $X$.

כיוון ש-$X$ קומפקטי אז קיימים $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך
ש- $\bigcup_{1\le i\le n} K_{\alpha_i}^c = X$. לכן (דה מורגן) $\bigcap_{1\le i\le n} K_{\alpha_i} = \emptyset$
וזה סתירה לתנאי של השאלה.

ב' יהי $\{U_\alpha\}$ כיסוי פתוח של המרחב. בלי הגבלת.
הכלליות אפשר להניח שכל $U_\alpha$ לא ריקות. נניח -
בדרך השלילה – שהכיסוי לא מכיל שום תת-כיסוי סופי.
נתבונן בתת-קבוצות $U_\alpha^c$. הן כולן סופיות ולא שוות ל-$X$
(כי הנחנו ש-$U_\alpha$ לא ריקות), ו- $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha^c = \emptyset$. (*)

ושום חיתוך סופי מסוג $U_{\alpha_1}^c \cap \dots \cap U_{\alpha_n}^c$ לא ריק. אזי קיים
מספר מינימלי $m \in \mathbb{N}$ בין מספרי האיברים בכל החיתוכים
הסופיים. אם $U_{\alpha_1}^c \cap \dots \cap U_{\alpha_k}^c$ מכיל $m$ איברים אז לכל תת-
קבוצה $U_{\alpha_{k+1}}^c$ נוספת גם $U_{\alpha_1}^c \cap \dots \cap U_{\alpha_k}^c \cap U_{\alpha_{k+1}}^c$
מכיל $m$ איברים, ז"א כל תת-קבוצה $U_{\alpha_{k+1}}^c$ נוספת כבר
מוכלת ב-$U_{\alpha_1}^c \cap \dots \cap U_{\alpha_k}^c$ ומזה נובע ש-

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha^c = U_{\alpha_1}^c \cap \dots \cap U_{\alpha_k}^c \neq \emptyset$$

שסותר ל-(*).

7. יהי $\{U_\alpha\}$ כיסוי פתוח של המרחב. נבחר ממנו תת-קבוצה $U_{\alpha_0}$ כלשהי. אם $U_{\alpha_0} = X$ הכל הוכח.

אחרת נתבונן ב-$F = U_{\alpha_0}^c$. ברור ש- $\{U_\alpha\}$ מכסה גם את תת-מרחב $F$ (ההרצאה) . אבל $F$ קבוצה סגורה ולכן - לפי התנאי – קומפקטית (כתת-מרחב). לכן קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ כך ש-$F \subseteq U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ ואז:

$$U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup U_{\alpha_0} \supseteq F \cup U_{\alpha_0} = X$$

זאת אומרת $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}, U_{\alpha_0}$ תת-כיסוי סופי ו-$X$ קומפקטי, מש"ל.