תורת הקבוצות — תרגיל בית 1
פתרונות

חיים שרגא רוזנר

כ"ז באדר, תשע"ה*

תקציר

סדר מלא, סדר טוב, יחס נורש ותכונות נורשות, $\in$־טרנזיטיביות, איחוד של קבוצה, חיתוך של קבוצה, סודר.

תזכורות

1. יחסים וסדרים

- יחס R על קבוצה A הוא:

  אנטי־רפלקסיבי אם לכל $a \in A$, מתקיים $(a,a) \notin R$.

  טרנזיטיבי אם לכל $a,b,c \in A$, מתקיים $(aRb \wedge bRc) \to aRc$.

  טריכוטומי אם לכל $a,b \in A$ מתקיים $aRb \vee bRa \vee a = b$.

  יחס סדר קווי (בקיצור: סדר) אם הוא אנטי־רפלקסיבי, טרנזיטיבי וטריכוטומי.

- יהי R סדר של הקבוצה A. נאמר שהאיבר $a \in A$ הוא **איבר ראשון** ב־A, אם לכל $b \in A$, מתקיים $a < b \vee a = b$.
- סדר קווי R על קבוצה A הוא **סדר טוב** עליה אם לכל תת־קבוצה לא ריקה $\varnothing \neq B \subseteq A$ יש איבר ראשון.
- יהי R יחס על קבוצה A, ותהי A' תת־קבוצה של A. נגדיר על A' את **היחס הנורש** מ־A על ידי $R' \coloneqq R \cap A' \times A'$. בדרך כלל לא נציין שאנו עוסקים ביחס הנורש, אלא נדבר על היחס R בהקשר לקבוצה A'. כל התכונות שמנינו לעיל הן **תכונות נורשות**, דהיינו אם R מקיים תכונה כלשהי מאלה, כיחס על A, אז R' מקיים את אותה התכונה על A'.

2. קבוצות

- קבוצה A היא **$\in$־טרנזיטיבית** אם לכל $a \in A$ ולכל $b \in a$ מתקיים $b \in A$.
- תהי A קבוצה. נסמן את **האיחוד** שלה על ידי

$$\bigcup A \coloneqq \{x \colon \exists y \in A,\, x \in y\}$$

  קיצורים מקובלים: $\bigcup_{i \in I} A_i \coloneqq \bigcup\{A_i \colon i \in I\}$, $A \cup B \coloneqq \bigcup\{A, B\}$.

*להגשה עד יום חמישי ו' בניסן (26 במרץ) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

- תהי A קבוצה לא ריקה. נסמן את ה**חיתוך** שלה על ידי

$$\bigcap A := \{x \colon \forall y \in A,\, x \in y\}$$

קיצורים מקובלים דומים לקיצורי האיחוד.

- קבוצה A היא **סודר** אם היחס $\in$ הוא יחס סדר טוב עליה ואם היא $\in$־טרנזיטיבית.
- 0 הוא מספר טבעי בקורס שלנו. הגדרות מדויקות למושגים כמו: אפס, מספר טבעי, קבוצה סופית, קבוצה אינסופית — מתוכננות להגיע במהלך הקורס, יש למה לחכות. אולי אפילו נגדיר מה היא קבוצה.

1 סדרים

1. תהי A קבוצה סדורה היטב, ונניח כי $f \colon A \to B$ היא פונקציה על. מצאו סדר טוב על B.

פתרון נסמן את הסדר הטוב של A על ידי $\prec$. נחפש פונקציה חח"ע $g \colon B \to A$ שתהיה הופכית מימין ל־f, דהיינו שיתקיים $f \circ g = \mathrm{id}_B$. או אז, נגדיר את היחס $<$ על B כהשראה על ידי g: $b_1 < b_2$ כאשר $g\left(b_1\right) \prec g\left(b_2\right)$. אנו טוענים כי במקרה זה היחס $<$ יהיה סדר טוב, כי הוא איזומורפי לסדר $\prec$ על הקבוצה $\mathrm{Im} g$.
נתחיל בחיפושים אחר הגדרת g. יהי $b \in B$ נתון. אזי נביט בקבוצת המקורות של b על ידי f, $f^{-1}\left(b\right) = \{a \in A \colon f\left(a\right) = b\}$. קבוצה זו איננה ריקה, כי f על. זו תת־קבוצה לא ריקה של הקבוצה הסדורה היטב A, ולכן יש שם איבר ראשון. נסמן אותו a'. בנינו כאן כלל התאמה חד־ערכי מ־B ל־A, התאמה זו נסמן על ידי $g\left(b\right) = \min_{\prec} f^{-1}\left(b\right)$, ובכך נגדיר את הפונקציה g. נותר להראות כי g אכן חח"ע והופכית מימין ל־f, ונשאיר זאת כתרגיל פתוח.
כעת נגדיר את היחס $<$, כפי שהבטחנו בתחילה: $b_1 < b_2$ כאשר $g\left(b_1\right) \prec g\left(b_2\right)$. עלינו להראות כי $<$ הוא אנטי־רפלקסיבי, טרנזיטיבי ולכל תת־קבוצה לא ריקה של B יש איבר ראשון על פיו.[1] במקום להראות את כל אלה במישרין, אנו טוענים ש־g הוא **איזומורפיזם סדר** מ־B ל־Img. ואכן, g פונקציה חח"ע, ברור שהיא על תמונתה, ומהגדרת $<$, היא שומרת על הסדר. לכן הקבוצה הסדורה $(B, <)$ איזומורפית־סדר לקבוצה הסדורה $(\mathrm{Img}, \prec)$,[2] ומכיוון שסדר טוב היא תכונה נורשת, אז הקבוצה האחרונה שהזכרנו סדורה היטב. בכך השלמנו את ההוכחה. ■

2. (השאלה בוטלה.)

3. נגדיר את הסדר המילוני[3] על קבוצת הסדרות האינסופיות של אפסים ואחדים

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(a_0, a_1, \dots) \colon \forall n,\, a_n \in \{0,1\}\}$$

[1] ניתן לוותר על טריכוטומיות, לפי משפט מההרצאה.
[2] הכוונה כאן היא לסדר הנורש.
[3] **הסדר המילוני** על שתי קבוצות סדורות A, B מוגדר בצורה הבאה: $(a_1, b_1) <_{\mathrm{lex}} (a_2, b_2)$ אם מתקיים אחד מהשניים:

(א) $a_1 <_A a_2$, או
(ב) $a_1 = a_2$ וכן $b_1 <_B b_2$.

בהרצאה ראינו שאם A, B סדורות היטב, הרי שהסדר המילוני הוא טוב. אינדוקציה פשוטה מראה שהטענה

בצורה הבאה: $(b_0, b_1, \dots) < (a_0, a_1, \dots)$ אם ורק אם: יש מספר טבעי n כך ש־$(a_0, \dots, a_{n-1}) = (b_0, \dots, b_{n-1})$, וכן $a_n < b_n$.

קל לראות שהסדר הזה הוא מלא. הוכיחו שסדר זה אינו טוב.

פתרון נביט בקבוצה $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, כאשר e_i הוא הסדרה שערכה 1 במקום ה־i, ובכל מקום אחר היא 0. אז מתקיים, לכל $i \in \mathbb{N}$, $e_i > e_{i+1}$. לכן קבוצה זו היא סדרה אינסופית יורדת, ובפרט אין לה איבר ראשון. ■

2 $\in$־טרנזיטיביות

1. תהי A קבוצה לא ריקה של קבוצות $\in$־טרנזיטיביות. הראו כי $\bigcup A$ ו־$\bigcap A$ גם הן $\in$־טרנזיטיביות.

פתרון ראשית נראה עבור האיחוד $\bigcup A$. יהיו a, b המקיימים $a \in b \in \bigcup A$. מהנתון $b \in \bigcup A$ עולה כי קיימת $x \in A$ כך ש־$a \in b \in x$. לפי הנתון, x היא $\in$־טרנזיטיבית, ולכן $a \in x \subseteq \bigcup A$, או $a \in \bigcup A$, כנדרש. עבור החיתוך הטיעון דומה. ■

2. (השאלה בוטלה.)

3. (השאלה נדחתה לתרגיל בית 2.)

4. (השאלה נדחתה לתרגיל בית 2.)

5. יהי α סודר. נסמן $S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$. הראו כי $\in$ הוא סדר טוב על $S(\alpha)$. נזכיר כי בשיעור הראינו ש־$S(\alpha)$ היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית, ובהוכחה זו תשלימו את הטענה כי $S(\alpha)$ הוא סודר בפני עצמו.

פתרון לפי משפט מההרצאה, אין צורך לבדוק טריכוטומיות. נבדוק אנטי־רפלקסיביות, טרנזיטיביות ושלכל תת־קבוצה לא ריקה יש איבר ראשון.

- <u>אנטי־רפלקסיביות</u>: יהי $x \in S(\alpha)$. אזי $x \in \alpha$ או $x \in \{\alpha\}$. אם $x \in \alpha$ אז $x \notin x$, כי $\in$ יחס אנטי־רפלקסיבי על α. אם $x \in \{\alpha\}$ אז $x = \alpha$. α הוא סודר, ולכן $\alpha \notin \alpha$ (הראנו בשיעור). אם כן, בכל מקרה, $x \notin x$.
- <u>טרנזיטיביות</u>: יהיו $x, y, z \in S(\alpha)$ המקיימים $x \in y \in z$. נראה $x \in z$. נבדוק את שתי האפשרויות עבור z. אם $z \in \alpha$, אז $\in$ הוא יחס טרנזיטיבי על $\{x, y, z\}$, ולכן $x \in z$. אחרת, $z \in \{\alpha\}$, דהיינו $z = \alpha$. קיבלנו ש־$x \in y \in \alpha$, ומכיוון ש־α הוא $\in$־טרנזיטיבי, נקבל $x \in \alpha = z$.
- <u>סדור היטב</u>: תהי $\varnothing \neq B \subseteq S(\alpha)$, נראה של־$B$ יש איבר ראשון. נבדוק שלוש אפשרויות:
  - ◁ אם $B \subseteq \alpha$, מכיוון ש־α סדורה היטב, ל־B יש איבר ראשון.
  - ◁ אחרת, $B \cap \{\alpha\} \neq \varnothing$, דהיינו $\alpha \in B$.

נכונה לכל מכפלה **סופית** של קבוצות סדורות היטב. בתרגיל זה אנו מדגימים שניתן להכליל את הבניה של סדר מילוני גם למכפלה אינסופית סדורה היטב של קבוצות סדורות (במקרה שלנו: מכפלה "מאורך $\mathbb{N}$", שהיא קבוצה סדורה היטב), אך במכפלה אינסופית עלול להתקבל סדר מילוני שאיננו סדר טוב. זאת, על אף שהכפלנו רק קבוצות סדורות היטב. אם כן, ההכללה של הטענה מההרצאה טובה רק למכפלות מאורך סופי.

- אם B ו־α אינם זרים, אז ל־$B \cap \alpha$ יש איבר ראשון, x. מתקיים $x \in B \cap \alpha \subseteq \alpha$, ולכן $x \in \alpha$, ו־x ראשון ב־$B = (B \cap \alpha) \cup \{\alpha\}$.
- אם B זר ל־α אז $B = \{\alpha\}$, ומכיוון ש־B סופית לא ריקה יש לה איבר ראשון.

מצאנו כי בכל מקרה יש איבר ראשון ב־B. ∎

ב ה צ ל ח ה!