

א' אב תשס"ט, 22.7.09

חשבון אינפיניטיסימלי 2: 88-133-08**מועד א'**

זמן הבחינה: 120 דקות. חומר עזר אינו מותר למעט מחשבון פשוט. המבחן הוא בן שני עמודים. משקל כל שאלה הוא 20 נקודות.

חלק א' – ענה על שלוש שאלות מתוך הארבע:

שאלה 1. תהינה $f(x): [a, b] \rightarrow [c, d]$, $f_n(x)$ פונקציות כך ש: $f_n(x) \rightarrow f(x)$ במידה שווה בקטע $[a, b]$. תהא $g(x): [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $[c, d]$. הוכח כי סדרת הפונקציות $g(f_n(x))$ מתכנסת במידה שווה לפונקצית הגבול $g(f(x))$. (רמז: כל הקטעים סגורים וזה לא נכון אם הם לא).

שאלה 2. א. הגדר מהי קבוצה סגורה ומהי קבוצה חסומה ותן דוגמה לקבוצה סגורה שאינה חסומה. ב. הוכח שאם $f(x, y)$ רציפה בתחום סגור וחסום אז היא רציפה במידה שווה שם.

שאלה 3. יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ שני טורי חזקות עם רדיוסי התכנסות R_1 ו- R_2 בהתאמה, ונתון: $R_2 < R_1$.

הוכח כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ הוא R_2 .

שאלה 4. א. חשב את הפונקציה: $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dt$, $x > 0$.

ב. הוכח כי האינטגרל: $\int_0^{\infty} t^n e^{-tx} dt$ מתכנס לכל: $x > 0, n \in \mathbb{N}$.

ג. היעזר ב- f כדי להראות את השוויון: $n! = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$. נמק את צעדיך!

חלק ב' – ענה על שתי שאלות מתוך השלוש:

שאלה 5. מצא נקודה על הפרבולה $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ הקרובה ביותר לישר $3x - 6y + 4 = 0$.

רמז: מרחק הנקודה (x, y) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא: $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

שאלה 6. תהא $f(x, y)$ רציפה בתחום $D = [0, 1] \times [-1, 1]$ והמקיימת בתחום זה: $\frac{1}{2}e^{xy} \leq f(x, y) \leq e^{xy}$.

הוכח כי קיימת נקודה $y_0 \in [-1, 1]$ בה: $\int_0^1 f(x, y) dx = 0.7$.

שאלה 7. א. היעזר בדיפרנציאל מסדר ראשון כדי להעריך בקירוב את: $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.

ב. קבע היכן לפונקציה $f(x, y) = \sqrt{xy}$ קיימות נגזרות חלקיות והיכן היא דיפרנציאבילית.

בהצלחה !