פתרון תרגיל 9 – ליניארית 1, קיץ 2011

תרגילים מהחוברת:

שאלה 6.2

יהיו $V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}_2[x]$ מרחבים ווקטוריים עם בסיסים $E=\{(1,2),(3,4)\}$, $F=\{1+x^2,x^2-1,x+5\}$ בהתאמה. נגדיר העתקה לינארית $T:V\to W$ על ידי $T(a,b)=3ax-2bx^2$. מצאו לפי הגדרה את $[T]_F^E$.

פתרון:

לפי הגדרת המטריצה המייצגת מתקיים:

$$[T]_F^E=\left([T(1,2)]_F\ \ [T(3,4)]_F\right)=\left([3x-4x^2]_F\ \ [9x-8x^2]_F\right)$$

על מנת לחשב את ווקטורי הקואורדינטות, יש לפתור את המשוואות הבאות:

$$3x-4x^2=\alpha(1+x^2)+\beta(x^2-1)+\gamma(x+5)$$
$$9x-8x^2=\delta(1+x^2)+\varepsilon(x^2-1)+\eta(x+5)$$

לבסוף מקבלים:

$$[T]_F^E=\begin{pmatrix}-9.5 & -26.5\\ 5.5 & 18.5\\ 3 & 9\end{pmatrix}$$

שאלה 6.11

תהא $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ הע"ל המוגדרת על ידי $T(x,y)=(2x+y,x+2y)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת של T^5 ביחס לבסיס הסטנדרטי.
ב. חשבו את $T^5(1,1)$

פתרון:

א. נמצא את המטריצה המייצגת של T:

$$\begin{cases}T(1,0)=(2,1)\\ T(0,1)=(1,2)\end{cases}\ \to\ [T]=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

וחישוב ישיר מראה כי- $[T^5]=\begin{pmatrix}122 & 121\\ 121 & 122\end{pmatrix}$

ב. $T^5(1,1)=\begin{pmatrix}122 & 121\\ 121 & 122\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}243\\ 243\end{pmatrix}$

שאלה 6.15

מצאו בצורה מפורשת העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ כך שמתקיים:
$\ker(T)=span\{1+x,1+x^2\},\ \operatorname{Im}(T)=span\{x+x^3,2x+2x^3\}$.

פתרון:

תחילה נשים לב כי $\operatorname{Im}(T)=span\{x+x^3,2x+2x^3\}=span\{x+x^3\}$, שכן שני הווקטורים בקבוצה הפורשת הם תלויים ליניארית.

אנו נמצא את ההעתקה לפי משפט ההגדרה. תחילה נשלים את הקבוצה $\{1+x,1+x^2\}$ לבסיס של $\mathbb{R}_2[x]$: $B=\{1,1+x,1+x^2\}$. כעת לפי משפט ההגדרה קיימת העתקה ליניארית (והיא יחידה!) המקיימת:

$$T(1)=x+x^3$$
$$T(1+x)=0$$
$$T(1+x^2)=0$$

נמצא את ההעתקה בצורה מפורשת:

יהי $ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$ ווקטור כללי כלשהו. אזי ניתן להציגו (באופן יחיד) כצירוף ליניארי של איברי הבסיס: $ax^2+bx+c=\alpha\cdot 1+\beta(1+x)+\gamma(1+x^2)$ [נסמן משוואה זו ב- (*)].
נפתור עבור α,β,γ ונקבל: $\alpha=c-a-b,\ \beta=b,\ \gamma=a$. נציב זאת ב-(*) ונקבל:
$ax^2+bx+c=(c-a-b)\cdot 1+b(1+x)+a(1+x^2)$. נפעיל את T על שני האגפים:
$T(ax^2+bx+c)=(c-a-b)T(1)+bT(1+x)+aT(1+x^2)$. נציב את הנתונים מההגדרה של הפונקציה: $T(ax^2+bx+c)=(c-a-b)(x+x^3)+b\cdot 0+a\cdot 0$ ונקבל את ההעתקה המפורשת: $T(ax^2+bx+c)=(c-a-b)(x+x^3)$

שאלה 6.22

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית המוגדרת על ידי $T(x,y,z)=(2x-y,z+2y)$, ותהא $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית המוגדרת על ידי $S(x,y)=(x+y,y+2x)$

א. מצאו את המטריצות המייצגות $[S],[T]$

ב. מצאו ישירות את ההעתקה ST וחשבו את $[ST]$. הראו שהתוצאה שווה למכפלת המטריצות $[S],[T]$.

פתרון:

א. לפי ההגדרה כמו בתרגיל הקודם:

$$[T]=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},[S]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

ב. $ST(x,y,z)=S(2x-y,z+2y)=(2x+y+z,4x+z)$

$[ST]=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ וקל לראות שזה שווה למכפלת המטריצות מהסעיף הקודם.

תוספת לתרגיל 9 אלגברה לינארית

הגדרה:

יהיו V,W מ"ו. נביט באוסף כל ההעתקות הלינאריות $T:V\to W$. נגדיר עליו סכום באופן הבא $(T+S)(v):=Tv+Sv$, וכפל בסקלר $(aT)(v):=aTv$. קל לוודא שזהו מרחב וקטורי תחת הגדרות אלה, נסמן אותו ב $Hom(V,W)$ (קיצור להומומורפיזם).

1. מצא בסיס ומימד ל $Hom(V,W)$ בהנתן $E=\{v_1,\dots,v_n\}, F=\{w_1,\dots,w_m\}$ בסיסים ל V,W בהתאמה.

פתרון:

נביט בפונקציה T_{ij} המוגדרת לפי משפט ההגדרה ע"י
$$\begin{aligned} T_{ij}v_i &= w_j \\ T_{ij}v_k &= 0 \quad k\neq i \end{aligned}.$$

נוכיח כי אוסף הפונקציות מהצורה הזו מהווה בסיס (ולכן המימד הינו $n\cdot m$ שזה מספר הפונקציות הנ"ל).

בת"ל- ניקח צירוף לינארי מתאפס כלשהו של הפונקציות הללו: $\alpha_{11}T_{11}+\dots+\alpha_{nm}T_{nm}=0$. שימו לב שהצירוף הלינארי הזה הינו העתקה לינארית (העתקת האפס). נציב v_i ונקבל ולכן $\alpha_{11}T_{11}v_i+\dots+\alpha_{nm}T_{nm}v_i=0$

$$\begin{aligned} \alpha_{i1}T_{i1}v_i+\dots+\alpha_{im}T_{im}v_i &= 0 \\ \alpha_{i1}w_1+\dots+\alpha_{im}w_m &= 0 \end{aligned}$$

ומכיוון שזה בסיס נובע שהסקלרים $\alpha_{i1},\dots,\alpha_{im}$ בהכרח אפס. הדבר נכון לכל i ולכן כל הסקלרים הם אפס ולכן הקבוצה בת"ל.

פרישה- תהי T העתקה לינארית כלשהי. לכל v_i נסמן $[Tv_i]_F=\begin{pmatrix}\alpha_{i1}\\ \vdots \\ \alpha_{im}\end{pmatrix}$. לכן, על וקטורי הבסיס קל לראות כי $Tv_i=\alpha_{i1}w_1+\dots+\alpha_{im}w_m=\alpha_{i1}T_{i1}v_i+\dots+\alpha_{im}T_{im}v_i=\alpha_{11}T_{11}v_1+\dots+\alpha_{nm}T_{nm}v_1$

לפי משפט ההגדרה, קיימת העתקה לינארית יחידה השולחת את איברי הבסיס לתמונות מסוימת, לכן $T=\alpha\ T=\alpha_{11}T_{11}+\dots+\alpha_{nm}T_{nm}$, ומכאן הקבוצה פורשת.

2. נניח ו- $\dim V = \dim W$ האם אוסף האיזומורפיזמים בינהם (העתקות לינארית חח"ע ועל) מהווה תת מרחב וקטורי של $Hom(V,W)$? האם תשובתך תשתנה אם $\dim V \neq \dim W$? הוכח.

פתרון:

אם שני המימדים הם אפס, אזי קבוצת האיזומורפיזמים בינהם הינה מרחב האפס וזה אכן מרחב וקטורי. אם אחד המימדים שונה מאפס (וזה לא משנה אם הם שווים או שונים) אזי העתקת האפס אינה איזומורפיזם ולכן לא ייתכן וקבוצת האיזומורפיזמים מהווה תת מרחב.

(העתקת האפס לא תהיה איזומורפיזם כי זה לא ייתכן לפי משפט הדרגה – התמונה היא ממימד אפס ואז הפונקציה אינה חח"ע או שאינה על).

3. יהיו $U = span\{(1,1,2,0),(0,-1,2,1),(1,1,0,0),(3,4,0,-1)\}$

$$W = span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\right\}$$

בכל אחד מהסעיפים בדוק האם קיימת העתקה לינארית $T:U\to W$ המקיימת את המשוואות הבאות, ואם כן מצא אחת כזו במפורש:

א.
$$T(1,1,2,0)=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$$
$$T(0,-1,2,1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$T(1,1,0,0)=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$$
$$T(3,4,0,-1)=\begin{pmatrix}2&3\\3&8\end{pmatrix}$$

ב.
$$T(1,1,2,0)=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$
$$T(0,-1,2,1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$$
$$T(1,1,0,0)=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$$

פתרון:

ניתן לחשב ולמצוא כי $(3,4,0,-1)=(1,1,2,0)-(0,-1,2,1)+2(1,1,0,0)$. כמו כן התמונות מקיימות את הצירוף הלינארי הזה $\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\3&8\end{pmatrix}$. מכיוון ש $E=\{(1,1,2,0),(0,-1,2,1),(1,1,0,0)\}$ בת"ל הם מהווים בסיס ל U ולכן לפי משפט ההגדרה קיימת העתקה יחידה כזו.

נמצא אותה במפורש. נמצא בסיס סטנדרטי לU (כלומר בסיס שקל לחשב קואורדינאטות לפיו)

$$a(1,1,2,0)+b(0,-1,2,1)+c(1,1,0,0)=(a+c,a-b+c,2a+2b,b)$$

הקואורדינאטה הרביעית יכולה להיות כל מספר מכיוון ש b יכול להיות כל מספר. הקואורדינאטה השלישית גם יכולה להיות כל מספר ללא תלות ברביעית, כי a יכול להיות כל מספר. באופן דומה גם הקואורדינאטה השנייה לא תלוייה באחרות, ורק הראשונה תלוייה.

נסמן

$$\begin{aligned} b &= x \\ 2a+2b &= y \\ a-b+c &= z \end{aligned}$$

ולכן $U=\{(z+x,z,y,x)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ והבסיס הסטנדרטי הוא

$$S_U=\{(1,0,0,1),(0,0,1,0),(1,1,0,0)\}$$

נמצא בסיס סטנדרטי ל W:

$a\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2a+c\\2a+c&3a+2b+2c\end{pmatrix}$ קל לראות שאיברים בשורה הראשונה חופשיים לגמרי, והאיבר השני בשורה השנייה חופשי, ואילו האיבר הראשון של השורה השנייה תלוי באחרים. נסמן

$$\begin{aligned} a &= x \\ 2a+c &= y \\ 3a+2b+2c &= z \end{aligned}$$

ולכן

$w=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\y&z\end{pmatrix}: x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ והבסיס הסטנדרטי הינו $S_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

כעת קל מאד לראות כי $[T]_{S_W}^{E}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&8\end{pmatrix}$, $[I]_{S_U}^{E}=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$,

$[I]_{E}^{S_U}=\left([I]_{S_U}^{E}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\1&0&0\\2&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$. ביחד $[T]_{S_W}^{S_U}=[T]_{S_W}^{E}[I]_{E}^{S_U}=\begin{pmatrix}4&-\frac{1}{2}&2\\5&-\frac{1}{2}&3\\14&-2\frac{1}{2}&8\end{pmatrix}$

ולכן $[T(z+x,z,y,x)]_W=[T]_{S_W}^{S_U}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x-\frac{1}{2}y+2z\\5x-\frac{1}{2}y+3z\\14x-2\frac{1}{2}y+8z\end{pmatrix}$

ולכן

$$T(z+x,z,y,x)=\begin{pmatrix} 4x-\frac{1}{2}y+2z & 5x-\frac{1}{2}y+3z \\ 5x-\frac{1}{2}y+3z & 14x-2\frac{1}{2}y+8z \end{pmatrix}$$

4. מצא את הגרעין של ההעתקה/ות שמצאת בשאלה 3.

פתרון:

ידוע כי $N\left([T]_{S_W}^{S_U}\right) = [\ker T]_{S_U}$ ולכן במקרה זה הגרעין הינו אפס.