תורת החבורות (Group Theory)

ספרים

- אוניברסיטה פתוחה – מבנים אלגברים
- יונתן גולן – אלגברה מודרנית
- J. Rotman
- L. Rowen

א. הגדרה ותכונות בסיסיות

הגדרה

חבורה היא קבוצה G עם פעולה $*: G \times G \to G$ המקיימת אקסיומות:

א) סגירות: לכל $a, b \in G$ (לאו דווקא שונים) $a * b \in G$
ב) קיבוציות(אסוציאטיביות): $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$
ג) קיום יחידה: קיים איבר $e \in G$ כך שלכל $a \in G$ $e * a = a * e = a$
ד) קיום הופכי: לכל $a \in G$ קיים $b \in G$ כך ש$a * b = b * a = e$ כאשר e יחידה

הערה

אם אין את (ד) זה נקרא אגודה. אם אין את (ג) זה נקרא מונואיד.

תכונה 1

לכל איבר $a \in G$ קיים הופכי יחיד

הוכח

לכל איבר קיים הופכי לפי אקסיומה (ד). נניח שקיימים שני הופכיים ל$a \in G$. נסמנם $b, c \in G$. מ"ל $b = c$.

אכן, $e * c = c$

$$b \underset{\text{לפי קיום יחידה}}{=} b * e \underset{\text{הופכי של } a}{=} b * (a * c) \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} (b * a) * c \underset{b \text{ הופכי של } a}{=} e * c = c$$

סימון

נסמן את ההופכי של $a \in G$ a^{-1}

הערה

לפי תכונה 1, יש משמעות מוגדרת היטב לסימון זה

תכונה 2

בכל חבורה G, קיים איבר יחידה יחיד.

הוכחה

לפי אקס. (ג) יש איבר יחידה בG. יהיו $e_1, e_2 \in G$ איברי יחידה. מ"ל $e_1 = e_2$.

אז $e_2 \underset{\substack{\text{כי}\\ e_1\\ \text{יחידה}}}{=} e_1 * e_2 \underset{\substack{\text{כי}\\ e_2\\ \text{יחידה}}}{=} e_1$

סימון

נסמן את איבר היחידה של החבורה G בe_G.

אם ברור לאיזו חבורה מתייחסים נסמן e.

הגדרה 2

חבורה G עם פעולה * המקיימת לכל $a, b \in G$, $a * b = b * a$ נקראת חבורה אבלית (Abelian Group)

ב. דוגמאות

1)

א) $\mathbb{N}$ - מספרים טבעיים

פעולה - $+ = *$(חיבור).

אין איבר יחידה, ולכן זו אינה חבורה.

ב) $\mathbb{N} \cup \{0\}$ עם חיבור

אין הופכי, ולכן זו אינה חבורה

ג) $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0)$

השלמים ביחס לחיבור היא חבורה אבלית אינסופית

2) $\mathbb{Z}$ ביחס לכפל אינה חבורה

3) שאלה – האם $\mathbb{Q}$ הרציונלית חבורה?

תשובה:

א) ביחס לחיבור זו חבורה אבלית אינסופית שנקראת $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, 0)$

ב) ביחס לכפל אינה חבורה, כי לאפס אין הופכי.

ג) אבל, $\mathbb{Q}^* = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ היא חבורה אבלית(אינסופית)(נקרא חבורה כפלית)

4) $\mathbb{R}$ רציונליים

א) $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, 0)$ חבורה אבלית אינסופית

ב) $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ חבורה אבלית אינסופית.

5) $\mathbb{C}$ מרוכבים

א) $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, 0)$ חבורה אבלית אינסופית

ב) $\mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ חבורה אבלית אינסופית.

6) עובדה כללית

בהינתן שדה $\mathbb{F}$, החבורה החיבורית של $\mathbb{F}$ $(\mathbb{F}, +, 0)$ היא חבורה אבלית.

$\mathbb{F}$ אינו חבורה ביחס לכפל(כי לאפס אין הופכי) אבל החבורה הכפלית של $\mathbb{F}$ $(\mathbb{F}^* \coloneqq (\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$

הערה

בפרט, אם $\mathbb{F}$ שדה סופי $(\mathbb{F}, +, 0)$ ו$\mathbb{F}^* = (\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ חבורות אבליות סופיות.

7) שאלה

יהי n מספר טבעי. האם קיימת חבורה G שסדרה הוא n (כלומר $|G| = n$)?

התשובה חיובית

הגדרה

$\mathbb{Z}_n \coloneqq \{0,1, \dots n-1\}$ עם חיבור מודולו n.

עובדה

לכל n טבעי $\mathbb{Z}_n$ חבורה אבלית(סופית)

הערה חשובה

אין חבורה ריקה כי איבר היחידה נמצא תמיד בחבורה.

שאלה

האם יש חבורה מסדר 1?

הגדרה

החבורה הטריוויאלית $G = \{e\}$ היא חבורה אבלית

ג. דוגמאות לחבורות לא אבליות

1) מטריצות

$$M_n(\mathbb{R}) \coloneqq \begin{array}{c}\text{קבוצת המטריצות}\\ \text{מסדר } n \times n\\ \text{ביחס ל}\mathbb{R}\end{array}$$

היא חבורה אבלית ביחס לחיבור מטריצות

הערה: כל מרחב וקטורי הוא חבורה אבלית ביחס לחיבורי וקטורים.

עובדה: $M_n(\mathbb{R})$ אינה חבורה ביחס לכפל מטריצות כי לכל מטריצה עם דט. אפס אין הופכי.

הגדרה

$$GL_n(\mathbb{R}) \coloneqq \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

עובדה

$GL_n(\mathbb{R})$ חבורה

הוכחה

(א) סגירות – לכל $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$.
מסקנה: $\forall A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ $AB \in GL_n(\mathbb{R})$
(ב) אסוציאטיביות – כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי
(ג) קיום יחידה - $e = I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
(ד) קיום הופכי: משפט מאלגברה ליניארית - אם $\det A \neq 0$ אז A הפיכה

האם $GL_n(\mathbb{R})$ אבלית?

הערה: עבור $n = 1$ $GL_1(\mathbb{R})(\equiv \mathbb{R}^*)$ אבלית.

טענה

עבור $n \geq 2$ $GL_n(\mathbb{R})$ אינה אבלית.

הוכחה(עבור $n = 2$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עבור n כללי

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

הערה

$GL_n(\mathbb{F})$ נקראת החבורה הליניארית הכללית מעל שדה $\mathbb{F}$ (general linear group)

2) עוד דוגמה לחבורה שאינה אבלית

$$SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

תרגילים

(1) הראה $SL_n(\mathbb{R})$ חבורה
(2) הראה $SL_n(\mathbb{R})$ אינה אבלית עבור $n \geq 2$

הערה

$SL_n(\mathbb{F})$ נקראת החבורה הליניארית המיוחדת מעל שדה $\mathbb{F}$ (special linear group)

עובדה

אם $\mathbb{F}$ שדה סופי, $n > 1$, אזי $GL_n(\mathbb{F})$ו $SL_n(\mathbb{F})$ חבורות סופיות שאינן אבליות

3) דוגמה נוספת לחבורה סופית שאינה אבלית

הגדרה
תמורה על האותיות $[n] \coloneqq \{1,2,\dots n\}$ היא העתקה חח"ע ועל מ$[n]$ ל$[n]$:
$\pi: [n] \to [n]$ חח"ע ועל תמורה.
רושמים: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$

קבוצת כל התמורות מ$[n]$ ל$[n]$ $S_n \coloneqq$

דוגמאות
$$S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

<u>**עובדה:**</u> $|S_n| = n!$

טענה
S_n עם פעולת הרכבת פונקציות היא חבורה.

"הוכחה"
(א) סגירות – כי הרכבת פונקציות חח"ע ועל היא פונקציה הופכית
(ב) קיום יחידה – תמורת הזהות $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$
(ג) קיום הופכי – להעתקה חח"ע ועל יש העתקה הפכית חח"ע ועל.
(ד) אסוציאטיביות – בדוק

הגדרה
S_{35r2} ביחס להרכבת פונקציות נקראת <u>החבורה הסימטרית על n אותיות</u>

טענה
עבור $n \geq 3$ S_n אינה אבלית.

הוכחה(עבור $n = 3$)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
מאידך
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

עבור n כללי: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ אינן מתחלפות

הערה
זוהי הדוגמה שפתחה את המחקר בתורת החבורות