תרגיל בית 8 באלגברה מופשטת 1
88-211 סמסטר א' תשע"ו

שאלה 1. הוכיחו כי $\mathrm{Aut}\left(S_3\right)\cong S_3$.

הוכחה. ראשית, יש לנו את ההומומורפיזם $f:S_3\to\mathrm{Aut}\left(S_3\right)$ לפי $f\left(a\right)=\gamma_a$ (ההצמדה ב-a), שהגרעין שלו הוא $Z\left(S_3\right)=\left\{ \mathrm{id}\right\}$. לכן הוא חח"ע, כלומר קיבלנו שיכון $S_3\hookrightarrow\mathrm{Aut}\left(S_3\right)$. רוצים להראות שהוא על, כלומר שכל אוטומורפיזם של S_3 הוא פנימי.

יהי $\varphi\in\mathrm{Aut}\left(S_3\right)$. כיוון ש-$\varphi$ שומר על סדרי האיברים (כי הוא איזומורפיזם), נקבל ש-φ שולח כל חילוף לחילוף. לצורך נוחות, נמספר את החילופים:

$$1=\left(1,2\right),\ 2=\left(1,3\right),\ 3=\left(2,3\right)$$

לכן נקבל פונקציה $g:\mathrm{Aut}\left(S_3\right)\to S_3$, השולחת כל אוטומורפיזם φ לתמורה $g\left(\varphi\right)$ שהוא משרה על קבוצת החילופים. g היא הומומורפיזם, אבל זה לא מה שחשוב; מה שחשוב הוא ש-g חח"ע. מדוע? כיוון שהחילופים יוצרים את S_3, אם שני אוטומורפיזמים ישלחו אותם לאותן תמונות, הם יזדהו בכל S_3. לכן g חח"ע, כלומר $\left|\mathrm{Aut}\left(S_3\right)\right|\le\left|S_3\right|=6$.

אבל גם g חח"ע, ולכן $\left|\mathrm{Aut}\left(S_3\right)\right|\ge\left|S_3\right|=6$, ומכאן ש-$\left|\mathrm{Aut}\left(S_3\right)\right|=6$. לכן הפונקציה f היא גם על, כלומר היא איזומורפיזם. לכן $\mathrm{Aut}\left(S_3\right)\cong S_3$ $\square$

שאלה 2. תהי G חבורה סופית, ונניח ש-$\left|G\right|>2$. הוכיחו כי $\left|\mathrm{Aut}\left(G\right)\right|\ge2$.

הוכחה. בעצם, צריך להראות שיש אוטומורפיזם של G שאינו הזהות. אם G אינה אבלית, יהי $a\notin Z\left(G\right)$. לכן γ_a, אוטומורפיזם ההצמדה ב-a, הוא אוטומורפיזם של G שאינו הזהות (כי $a\notin Z\left(G\right)$), כדרוש.

לכן אפשר להניח ש-G אבלית. נניח $\left|G\right|=n$. ראינו בתרגול שאם $k\le n$, $\left(k,n\right)=1$, הפונקציה $f\left(g\right)=g^k$ מגדירה אוטומורפיזם של G, והוא לא טריוויאלי (אם $g^k=e$, אזי $o\left(g\right)\mid k$. אבל $o\left(g\right)\mid n$, ולכן $o\left(g\right)=1$, כלומר $g=e$, בסתירה לנתון). לכן הוכחנו את הדרוש. $\square$

שאלה 3.

א. הראו שהתמורות $\left(1,2,3\right),\left(1,3,2\right)$, שיש להן אותו מבנה מחזורים, אינן צמודות ב-A_4. הראו שהן צמודות ב-A_5.

ב. מצאו $a\in S_6$ שעבורה $a^{-1}\left(1,2\right)\left(3,4\right)a=\left(5,6\right)\left(1,3\right)$.

ג. הראו כי לא קיים $a\in S_8$ שעבורו $a^{-1}\left(1,2,3\right)a=\left(1,3\right)\left(5,7,8\right)$.

פתרון.

א. נניח בשלילה שהן צמודות ב-A_4. תהי $\sigma\in A_4$ התמורה המעידה על כך, כלומר

$$\left(\sigma\left(1\right),\sigma\left(2\right),\sigma\left(3\right)\right)=\sigma\left(1,2,3\right)\sigma^{-1}=\left(1,3,2\right)\qquad(1)$$

לכן נבחין ראשית כי $\sigma(4)=4$. התמורות היחידות ב-A_4 המקיימות $\sigma(4)=4$ הן

$$\{\mathrm{id},(1,2,3),(1,3,2)\}$$

וקל לראות כי כולן מתחלפות עם $(1,2,3)$ (כי הן חזקות שלו); לכן משוואה (1) אינה יכולה להתקיים.
לחילופין, ממשוואה (1), מקבלים שיש שלוש אפשרויות:

- $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=3$ ו-$\sigma(3)=2$.
- $\sigma(1)=3$, $\sigma(2)=2$ ו-$\sigma(3)=1$.
- $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=1$ ו-$\sigma(3)=3$.

ביחד עם התנאי $\sigma(4)=4$, כל אחת מהתמורות האלו היא אי-זוגית, ולכן לא ב-A_4.
לגבי הצמידות ב-A_5: הצמדה בחילוף $(2,3)$ תיתן את התמורה הרצויה, אבל זה לא ב-A_5. כדי לתקן את זה, נוסיף את החילוף הזר $(4,5)$: תהי $\sigma=(2,3)(4,5)\in A_5$. לכן

$$\sigma(1,2,3)\sigma^{-1}=(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3))=(1,3,2)$$

ב. באופן שקול, צריך למצוא $a\in S_6$ שעבורה

$$a(5,6)(1,3)a^{-1}=(1,2)(3,4)$$

אפשר להוסיף $a^{-1}a$ באמצע, ולחפש תמורה $a\in S_6$ שעבורה

$$a(5,6)a^{-1}a(1,3)a^{-1}=(1,2)(3,4)$$

לפי הנוסחה להצמדות, מחפשים $a\in S_6$ שעבורה

$$(a(5),a(6))(a(1),a(3))=(1,2)(3,4)$$

ולכן נבחר למשל את $a=(1,3,4,5)(2,6)$.

ג. אין a כזה, כי התמורות $(1,2,3)$ ו-$(1,3)(5,7,8)$ אינן מאותו מבנה מחזורים.

שאלה 4.

א. קבעו את הסימן של התמורה $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1\end{pmatrix}$.

ב. מה מספר האיברים מסדר 2 ב-S_8?

פתרון.

א. נסמן $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1\end{pmatrix}$. לכן

$$\sigma=(1,n)(2,n-1)\dots$$

השאלה היא כמה חילופים יש כאן. נפריד בין המקרה שבו n זוגי לבין המקרה שבו n אי-זוגי.
אם n זוגי, יש כאן $\frac{n}{2}$ חילופים, ולכן $\operatorname{sign}\sigma=(-1)^{\frac{n}{2}}$.
אם n אי-זוגי, נסמן $n=2k+1$, אז $\sigma(k+1)=k+1$ (כי זה האיבר האמצעי), ואז יש פה k חילופים. כלומר $\operatorname{sign}\sigma=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.
אם רוצים גם נוסחה כללית, אפשר להשתמש בנוסחה

$$\operatorname{sign}\sigma=(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$$

(למרות שלא באמת חייבים אותה).

ב. כל איבר מסדר 2 ב-S_8 הוא מכפלה של חילופים זרים (כי אפשר לפרק אותו למכפלה של מחזורים זרים, ואז הסדר של כל מחזור הוא 2, כלומר כל מחזור הוא חילוף). נספור כמה איברים כאלו יש:

- מספר החילופים $(\cdot,\cdot)$ הוא $\binom{8}{2}$.
- מספר המכפלות $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ הוא $\binom{6}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\frac{1}{2}$. הסבר: לבחירת החילוף הראשון יש $\binom{8}{2}$ אפשרויות, וכיוון שהם זרים, לבחירת החילוף השני יש $\binom{6}{2}$ אפשרויות. מחלקים ב-2 כי יכול להיות שבחרנו שני חילופים זרים בסדר הפוך, והם מתחלפים זה עם זה.
- מספר המכפלות $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ הוא $\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\frac{1}{2}$. הסבר: קודם בוחרים את שני החילופים הראשונים בלי חשיבות לסדר, ואז בוחרים את השלישי. יש $\binom{4}{2}$ אפשרויות לעשות את זה, אבל שוב צריך לקחת בחשבון שיכול להיות שכתבנו את אותה מכפלה בסדר שונה. לכן מחלקים ב-3.
- מספר המכפלות $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ הוא $\frac{1}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\frac{1}{2}$. הסבר: אחרי שבחרנו את שלושת החילופים הראשונים אין ברירה לאחרון, אבל שוב – יכול להיות שכתבנו שתי תמורות זהות בסדר שונה.

לכן, בסך הכל מספר האיברים מסדר 2 ב-S_8 הוא

$$\binom{8}{2}+\frac{1}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}+\frac{1}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\binom{4}{2}+\frac{1}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{4}=763$$

(על פי חישוב בתוכנה המהוללת sage).

שאלה 5. מצאו תת-חבורה מסדר 20 ב-S_{10}.

פתרון. נרצה למצוא איברים $a,b\in S_{10}$ שעבורם $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$ ו-$ab=ba$. אז יתקיים

$$|\langle a,b\rangle|=|\langle a\rangle|\cdot|\langle b\rangle|$$

לפי תרגיל מהעבר ו/או הקריטריון למכפלה ישרה פנימית. ניקח $a=(1,2,3,4,5)$ ו-$b=(6,7,8,9)$. הם מקיימים את הדרישות (מתחלפים כי הם מחזורים זרים, ו-$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$ גם כי הם מחזורים זרים – כל חזקה של a תהיה זרה לכל חזקה של b, אלא אם כן שתיהן הזהות), ואכן

$$\langle a,b\rangle=\left\{a^ib^j\middle|i,j\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{a^ib^j\middle|0\le i\le 4,0\le j\le 3\right\}$$

היא תת-חבורה של S_{10} מסדר 20.

שאלה 6. נתונה הגדרה חלקית של תמורה,

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&1&2&?&?&7&8&9&6\end{pmatrix}\in S_9$$

ידוע כי התמורה זוגית. חשבו את $\sigma(4)$ ואת $\sigma(5)$.

פתרון. ראשית, נשים לב כי בפירוק של σ יופיעו המחזורים

$$(1,3,2)\,(6,7,8,9)$$

המכפלה שלהם אי-זוגית, ולכן צריך להוסיף חילוף. מכאן בהכרח ש-$\sigma(4)=5$ ו-$\sigma(5)=4$.

שאלה 7. תהי $\sigma \in S_9$ מסדר 5. עבור כמה $1 \le k \le 9$ מתקיים $\sigma(k) = k$?

פתרון. הפירוק למחזורים זרים חייב להיות $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, ולכן עבור ארבעה k-ים כנ"ל מתקיים $\sigma(k) = k$.

שאלה 8. נתבונן ב-S_6 ובקבוצה

$$H = \{\sigma \in S_6 | \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$$

הוכיחו ש-H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל-S_3. האם היא תת-חבורה נורמלית?

פתרון. נוכיח שהיא תת-חבורה לפי הקריטריון המקוצר:

- ראשית, ברור כי $\mathrm{id} \in H$.
- כעת, יהיו $\sigma, \tau \in H$. צ"ל כי $\sigma\tau^{-1} \in H$. אכן, לכל $n \in \{2,4,6\}$, $\sigma(n) = n$ ו-$\tau^{-1}(n) = n$, כלומר

$$\left(\sigma\tau^{-1}\right)(n) = \sigma\left(\tau^{-1}(n)\right) = \sigma(n) = n$$

ולכן $\sigma\tau^{-1} \in H$.

לפי הקריטריון המקוצר, $H \le S_6$.

נוכיח ש-$H \cong S_3$. אכן, נגדיר $f : H \to S_3$ כך: תהי $g : \{1,2,3\} \to \{1,3,5\}$ פונקציה חח"ע ועל (למשל, $g(n) = 2n - 1$). נגדיר

$$f(\sigma) = g^{-1} \circ \sigma \circ g$$

כלומר, קודם מפעילים את g ומקבלים מספר אי-זוגי ב-$\{1,2,\dots,6\}$, אז מפעילים את σ ומקבלים מספר אי-זוגי בחזרה, ומפעילים את g^{-1} כדי לחזור ל-$\{1,2,3\}$. נראה ש-f הומומורפיזם:

$$f(\sigma\tau) = g^{-1} \circ (\sigma\tau) \circ g = g^{-1} \circ \sigma \circ g \circ g^{-1} \circ \tau \circ g = f(\sigma) f(\tau)$$

נראה ש-f חח"ע: תהי $\sigma \in \ker f$. לכן

$$g^{-1} \circ \sigma \circ g = \mathrm{id} \Rightarrow \sigma = \mathrm{id}$$

(תמורת הזהות בצד שמאל היא תמורת הזהות ב-S_3, ואילו תמורת הזהות מימין היא תמורת הזהות ב-S_6). לכן f חח"ע. f על, כי הוא פונקציה חח"ע בין קבוצות סופיות מאותו הגודל (אפשר גם להוכיח ישירות). בסך הכל, f איזומורפיזם מ-H ל-S_3, ולכן $H \cong S_3$.

נראה ש-$H \ntriangleleft S_6$. ניקח $\sigma = (1,3) \in H$, $\tau = (1,2) \in S_6$, ונראה $\tau\sigma\tau^{-1} \notin H$. אכן, לפי הנוסחה להצמדה ב-S_n,

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(3)) = (2,3) \notin H$$

(התמורה הזו אינה ב-H מפני שהיא אינה קובעת את 2). לכן $H \ntriangleleft S_3$.