תרגיל בית 9 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. יהי F שדה. לכל אחד מהחוגים הבאים, קבעו האם הוא שדה, תחום אוקלידי, תחום ראשי, תחום פריקות יחידה וחוג נותרי:

א. $F\left[x\right]$.

ב. $F\left[x,y\right]$.

ג. $F\left[x,y,z\right]$.

ד. $F\left[x_1,x_2,\dots\right]$ (פולינומים ב-$\aleph_0$ משתנים).

שאלה 2. יהי R חוג חילופי, ויהי $R_0\subseteq R$ תת-חוג של R. נניח ש-R נוצר סופית מעל R_0, וש-R_0 הוא נותרי. הוכיחו כי R נותרי בעצמו. (רמז: ראינו בעבר שאם R נוצר סופית מעל R_0, אז R הוא מנה של חוג פולינומים $R_0\left[x_1,\dots,x_n\right]$ לאיזשהו $n\in\mathbb{N}$)

שאלה 3 (וידוא הגדרות)**.** יהי R חוג ותהי $(M,+)$ חבורה אבלית. נניח שנתונה פעולה בינארית $\psi\colon R\times M\to M$ שנסמן אותה $\psi(r,m)=rm$ לאיברים $r\in R$, $m\in M$. נגדיר על החבורה האבלית $R\oplus M$ פעולת כפל לפי

$$(r+m)(r'+m')=rr'+rm'$$

הוכיחו שפעולת כפל זו הופכת את $R\oplus M$ לחוג בלי יחידה אם ורק אם ψ הופכת את M למודול מעל R.

שאלה 4 (חימום)**.** יהי R חוג. הוכיחו שהקבוצות הבאות הן תת־מודולים של R^n (שהוא מודול מעל R):

א. $\{(a,\dots,a)\in R^n\mid a\in R\}$.

ב. $\{(a_1,\dots,a_n)\in R^n\mid a_1+\cdots+a_n=0\}$.

ג. $I_1\times\cdots\times I_n$ כאשר I_i הם אידאלים של R.

שאלה 5. תזכורת: אם V מרחב וקטורי מעל שדה F וישנה העתקה לינארית $T\colon V\to V$, אז ל-V יש מבנה של מודול מעל $F[x]$ על ידי הגדרת הכפל $f(x)\cdot v=f(T)(v)$.
יהי $M=\left(\mathbb{R}^2,T\right)$ מודול מעל $\mathbb{R}[x]$ כאשר T היא ההטלה על ציר ה-y, כמו בתזכורת. הוכיחו כי תת־המודולים היחידים של M הם $\mathbb{R}^2$, ציר ה-x, ציר ה-y ו-$\{(0,0)\}$.

שאלה 6. הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ אינו חופשי כמודול מעל $\mathbb{Z}$.

שאלה 7. יהי F שדה. ניזכר ש-F^n הוא מודול מעל $M_n\left(F\right)$. הוכיחו שזהו מודול פשוט.

שאלה 8. יהי R חוג. ניזכר ש-R הוא מודול מעל עצמו.

א. הראו ש-R הוא מודול ציקלי מעל עצמו.

ב. הוכיחו: R מודול פשוט מעל עצמו אם ורק אם R הוא חוג עם חילוק.

ג. נניח ש-R חילופי, ויהי $I \lhd R$ אידאל של R (לכן הוא גם תת־מודול של R כמודול מעל עצמו). הראו ש-I נוצר על ידי d איברים כאידאל (כלומר $I = \langle a_1, \dots, a_d \rangle$) אם ורק אם I נוצר על ידי d איברים כתת־מודול של R.

ד. תנו דוגמה למודול ציקלי M מעל חוג R ולתת־מודול $N \leq M$ כך ש-N אינו ציקלי. (רמז: $M = R$ עבור R לא תחום ראשי)

שאלה 9 (העשרה)**.** נסו להבין כמה שיותר מהדוגמאות בערך מודולים של הומומורפיזם בויקיפדיה, במיוחד לגבי חוגי אנדומורפיזמים.

בהצלחה!