Tile1 (1)

בהינתן (A,a_0) יש לקבוע האם קיים ריצוף כשר לחצי המישור בעזרת A כאשר a_0 מוצב ב$(-1,1)$.
האם $Tile1$ כריעה? ניתנת לזיהוי? הוכח.

פתרון

ננסה להוכיח שהבעיה אינה ניתנת לזיהוי ברדוקציה מ$Tile$. נבנה R היוצרת $R(T,t_0) = (A,a_0)$ כך ש$(A,a_0) \in Tile1 \Leftrightarrow (T,t_0) \in Tile$

הערה אנחנו לא יוצרים ריצוף, אלא קבוצה של אריחים. לא ניתן ליצור ריצוף כיוון שהריצוף הוא אינסופי, וכיוון שלא מובטח לנו שקיים ריצוף.

R(הבניה): ראשית נקבע $T \subseteq A$. בנוסף נוסיף אריח $\boxed{\begin{array}{ccc} & c & \\ \$ & & \$ \\ & \$ & \end{array}}$ (כאשר $\$$ סימן חדש שלא מופיע בT) עבור כל סימן c שמופיע באריחי T. לבסוף נקבע $a_0 = t_0$.

הבעיה חישובית. נוכיח נכונות:

$\Rightarrow$ $(T,t_0) \in Tile$ $\Leftarrow$ כלומר, קיים ריצוף כשר לחצי המישור בעזרת T עם t_0 בראשית. נסתכל על ריצוף לחצי המישור(ללא השורה $y=0$) שנוצר ב"הזזה" של הריצוף הקיים יחידה אחת למעלה ושמאלה. בריצוף זה, t_0 ממוקם ב$(-1,1)$.
נשלים ריצוף זה לריצוף מלא לחצי המישור ע"י כך שעבור כל אריח בשורה $y=1$ נציב תחתיו אריח a_c מתאים.(תמיד יש אריח כזה, וכולם מתאימים זה לצד זה).
הריצוף שנוצר הוא ריצוף כשר לחצי המישור בעזרת A שבו $a_0 = t_0$ מוצב ב$(-1,1)$ $\Leftarrow$ $(A,a_0) \in Tile1$

$\Leftarrow$ $(A,a_0) \in Tile1$ $\Leftarrow$ קיים ריצוף כשר לחצי המישור בעזרת A עם a_0 ב$(-1,1)$. נבחין שהאריחים $A \backslash T$ יכולים להופיע <u>רק</u> בשורה $y=0$(כי אין אף אריח שמלאים מתחתיו - הסימן $\$$ לעולם לא יופיע בצלע העליונה של אריח).
נסתכל על ריצוף דומה ש"הוזז" יחידה אחת ימינה ולמטה. בריצוף זה $t_0 = a_0$ נמצא ב$(0,0)$, וזהו ריצוף כשר המורכב מאריחי T בלבד $\Leftarrow$ $(T,t_0) \in Tile$

Tile2 (2)

בהינתן (A,a_0) יש לקבוע האם קיים ריצוף כשר לחצי המישור עם a_0 בראשית, וכך שקיים מקום אחד לפחות שבו שני אריחים זהים מוצבים בצמוד זה לזה. האם $Tile2$ כריעה? ניתנת לזיהוי? הוכח.

פתרון

ננסה להוכיח שהשפה לא ניתנת לזיהוי ברדוקציה מ$Tile$. $(T,t_0) \in Tile \Leftrightarrow (A,a_0) \in Tile2$

הבניה

ראשית נקבע $T \subseteq A$. בנוסף יהיו $\$,\#,*$ סימנים שלא מופיעים בT. ניצור אריחים חדשים:

- $a_\$ = \boxed{\begin{array}{ccc} & \$ & \\ \$ & & \$ \\ & \$ & \end{array}}$
- $a_c = \boxed{\begin{array}{ccc} & c & \\ \$ & & \$ \\ & \$ & \end{array}}$ (לכל סימן c באריחי T)
- $a_0 = \boxed{\begin{array}{ccc} & \# & \\ \$ & & \$ \\ & \$ & \end{array}}$
- $a_1 = \boxed{\begin{array}{ccc} & * & \\ \$ & & \$ \\ & \# & \end{array}}$

לבסוף, אם $t_0 = \boxed{\begin{array}{ccc} & c_1 & \\ c_4 & & c_2 \\ & c_3 & \end{array}}$, ניצור $a_2 = \boxed{\begin{array}{ccc} & c_1 & \\ c_4 & & c_2 \\ & * & \end{array}}$