תרגיל בית מס' 6

31 בדצמבר 2012

1. תהי G חבורה. לכל $g \in G$, נגדיר את פונקציית הצמדה על ידי g מ G ל G באופן הבא: $x \mapsto x^g = gxg^{-1}$. הוכיחו שהצמדה על ידי g היא איזומורפיזם.

פתרון: ברור שפונקציה זו מוגדרת היטב. נראה שהיא הומומורפיזם. יהיו $x, y \in G$. אזי

$$x^g y^g = gxg^{-1}gyg^{-1} = gxyg^{-1} = (xy)^g$$

כעת נותר להראות כי הפונקציה הזו הפיכה. אנו נטען כי הפונקציה $x \mapsto x^{\left(g^{-1}\right)}$ היא פונקציה הופכית. ואכן

$$\begin{aligned} \left(x^g\right)^{\left(g^{-1}\right)} &= g^{-1}\left(x^g\right)g = g^{-1}gxg^{-1}g = x \\ \left(x^{\left(g^{-1}\right)}\right)^g &= gx^{\left(g^{-1}\right)}g^{-1} = gg^{-1}xgg^{-1} = x \end{aligned}$$

אם כן מצאנו כי הפונקציה היא הומומורפיזם הפיך, ולכן זהו איזומורפיזם. ■
ניתן להראות כי הומומורפיזם זה הוא חח"ע ועל במקום למוא פונקציה הופכית.

2. יהי $\phi : G \mapsto H$ הומומורפיזם של חבורות. הראו כי $\phi : G \mapsto \mathrm{Im}\phi$ הוא אפימורפיזם.

פתרון: ראשית נטען כי הפונקציה מוגדרת היטב. ואכן ברור כי לכל $g \in G$ מתקיים $\phi(g) \in \mathrm{Im}\phi$. תכונת ההומומורפיזם נובעת במישרין מהפונקציה המקורית. נותר רק להראות כי הפונקציה הזו היא על, וזה נובע מהגדרת התמונה של פונקציה. ■

3. יהי $\phi : G \mapsto H$ איזומורפיזם של חבורות. הוכיחו ש $\phi^{-1} : H \mapsto G$ גם הוא איזומורפיזם של חבורות.

פתרון: לפי הנתון ϕ הפיכה, ולכן ϕ^{-1} מוגדרת היטב והפיכה. נראה שזה הומומורפיזם. יהיו $h_1, h_2 \in H$. נניח שהמקורות שלהם הם g_1, g_2 בהתאמה, דהיינו $\phi^{-1}(h_i) = g_i$. אזי $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = h_1h_2$, וכך נקבל $\phi^{-1}(h_1h_2) = g_1g_2 = \phi^{-1}(h_1)\phi^{-1}(h_2)$. אם כן זהו הומומורפיזם הפיך, ולכן איזומורפיזם. ■

4. יהי $\phi : G \mapsto H$ איזומורפיזם של חבורות. הוכיחו שלכל תת־חבורה $N \leq G$ מתקיים $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow \phi(N) \trianglelefteq H$. (במילים אחרות - איזומורפיזם שומר על נורמליות).

פתרון: אנו יודעים שאם $N \leq G$ ו־ϕ הומומורפיזם אז (לפי משפט האיזומורפיזם הראשון) התמונה $\phi(N)$ היא תת־חבורה של H. לכן התרגיל הוא רק להראות גרירה דו־כיוונית של נורמליות. נראה זאת בשני הכיוונים.

($\Leftarrow$) נתון כי לכל $g \in G$ מתקיים $gN = Ng$. יהי $h \in H$ נתון. אנו רוצים להראות כי $h \cdot \phi(N) = \phi(N) \cdot h$. ϕ הוא איזומורפיזם, ובפרט קיים $\phi^{-1}(h) \in G$. מתקיים עבורו, לפי נורמליות של Nב־G, $\phi^{-1}(h) \cdot N = N \cdot \phi^{-1}(h)$. נפעיל את ϕ על שני האגפים, ונקבל $h \cdot \phi(N) = \phi(N) \cdot h$, כנדרש.

($\Rightarrow$) יהי $g \in G$ נתון. אזי קיים $\phi(g) \in H$. מכיוון ש־$\phi(N) \trianglelefteq H$, מתקיים $\phi(g) \cdot \phi(N) = \phi(N) \cdot \phi(g)$. מכיוון ש־$\phi$הומומורפיזם, זה שקול לכך ש־$\phi(gN) = \phi(Ng)$. נפעיל את ϕ^{-1} על שני האגפים ונקבל $gN = Ng$. לפיכך $N \trianglelefteq G$. ■

5. יהיו m, n מספרים זרים. הוכיחו $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.

פתרון: נגדיר פונקציה $\phi : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ונראה שהיא איזומורפיזם. יהי $k + mn\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$. אזי נגדיר

$$\phi(k + mn\mathbb{Z}) = (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z})$$

ראשית נראה כי זה מוגדר היטב. ניקח שני נציגים של $k + mn\mathbb{Z}$, ונקרא להם $k + mn\mathbb{Z}$ ו־$k + mnl + mn\mathbb{Z}$, עבור l שלם. ובאמת

$$\begin{aligned} \phi(k + mn\mathbb{Z}) &= (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z}) = (k + mnl + m\mathbb{Z}, k + mnl + n\mathbb{Z}) \\ &= \phi(k + mnl + mn\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ולפיכך ההעתקה מוגדרת היטב. כעת נראה שזהו הומומורפיזם. יהיו k, l שלמים. אזי

$$\begin{aligned} \phi((k + mn\mathbb{Z}) + (l + mn\mathbb{Z})) &= \phi(k + l + mn\mathbb{Z}) \\ &= (k + l + m\mathbb{Z}, k + l + n\mathbb{Z}) \\ &= (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z}) + (l + m\mathbb{Z}, l + n\mathbb{Z}) \\ &= \phi(k + mn\mathbb{Z}) + \phi(l + mn\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ומצאנו כי זהו הומומורפיזם.

נראה כי ההעתקה ϕ היא חח"ע על ידי חישוב גרעין. יהי k שלם כך ש־$\phi(k + mn\mathbb{Z}) = (m\mathbb{Z}, n\mathbb{Z})$. זה אומר ש־$m \mid k$ וכן $n \mid k$. ביחד ניתן לומר כי $\operatorname{lcm}(m, n) \mid k$. בהתחשב בכך ש־$m, n$ זרים, הכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלהם היא מכפלתם זה בזה, ולכן $mn \mid k$, או $k \in mn\mathbb{Z}$. לכן $k + mn\mathbb{Z} = 0 + mn\mathbb{Z}$, והגרעין טריוויאלי. כך מצאנו כי ההעתקה היא חח"ע.

נותר רק להראות כי ההעתקה הזו היא על. נשתמש בכך שההעתקה היא חח"ע. לפי משפט מבדידה, העתקה חח"ע בין קבוצות סופיות שוות־עוצמה היא על. הראנו אם כן כי ϕ היא הומומורפיזם חח"ע ועל, ולכן איזומורפיזם. מכאן נובע המבוקש. ■

למעשה ההעתקה הזו היא ההעתקה של משפט השאריות הסיני, וגם שם הראנו על באותה צורה.

6. תהי C_n חבורה ציקלית מסדר n.

(א) כמה יוצרים שונים יש ל C_n? במילים אחרות, כמה איברים שונים $g \in C_n$ מקיימים $\langle g \rangle = C_n$.

פתרון: C_n היא חבורה ציקלית, ולכן יש לה יוצר g. נביט ב־g^k עבור k שלם. מכיוון שהסדר של g הוא n מתקיים $g^{k+mn} = g^k$, ולכן אנו מעוניינים רק במקרים $1 \leq k \leq n$. יהי k נתון, ונניח כי g^k הוא מסדר m. אנו מחפשים m טבעי מינימלי שיקיים $n \mid km$, מפני שאז $\left(g^k\right)^m = e$ והסדר הוא אכן m. ובכן, kmמתחלק ב־n וגם ב־k, ולכן km מתחלק ב־$\operatorname{lcm}(n,k)$. אנו מחפשים פתרון מינימלי, ולכן $km = \operatorname{lcm}(n,k)$, והפתרון הוא $m = \frac{n}{\gcd(n,k)}$.

אנו מפשים בשאלה הזו מתי $m = n$, ואז g^k יהיה יוצר של חבורה ציקלית מסדר n, הלוא היא C_n. לפי מה שמצאנו כאן, זה קורה כאשר $\gcd(n,k) = 1$, קרי כאשר k, n זרים. אם כן קבוצת היוצרים היא קבוצת האיברים $\left\{g^k \middle| (n,k) = 1\right\}$. אנחנו כבר ראינו תיאור אחר של קבוצת המספרים הזרים ל־n וקטנים ממנו, ועוצמתה היא בדיוק מספר אוילר $\varphi(n)$. ■

(ב) הראו, לכל $m \mid n$ קיימת תת־חבורה יחידה של C_n מסדר m.

פתרון: קיום: נניח g הוא יוצר של C_n. אזי נביט ב־$\left\langle g^{n/m} \right\rangle$. ברור כי זו תת־חבורה ציקלית, והיא מסדר m. לפיכך מצאנו קיום של תת־חבורה כמבוקש.

יחידות: יהי m נתון המקיים $m \mid n$. נסמן $k = \frac{n}{m}$ מספר שלם. אזי כאמור לעיל g^k יוצר חבורה מסדר m. תת־חבורה של חבורה ציקלית היא ציקלית, ולכן נניח כי g^l יוצר גם הוא חבורה מסדר m. לפי מה שהראנו בסעיף א, מתקיים בתנאים אלו $\gcd(n,k) = \gcd(n,l)$. לפי הנתון ש־k שלם ניתן להוציא גם כי k מחלק את n, ולכן $k = \gcd(n,k)$. שילוב הנתונים המראה כי $k = \gcd(n,l)$. לפי משפט, קיימים a, b שלמים כך ש־$k = an + bl$. לפי האמור,

$$g^k = g^{an+bl} = (g^n)^a \left(g^l\right)^b = \left(g^l\right)^b \in \left\langle g^l \right\rangle$$

אם היוצרים של $\left\langle g^k \right\rangle$ כולם נמצאים בחבורה $\left\langle g^l \right\rangle$, ויש להם אותו מספר איברים סופי אז החבורות שוות זו לזו. לפיכך יש רק חבורה אחת כזו. ■

7. תהיינה G חבורה, $H \leq G$, Γ קבוצה יוצרת של G, A קבוצה יוצרת של H. הוכח כי H נורמלית אם ורק אם לכל $\gamma \in \Gamma$, $a \in A$ מתקיים $\gamma a \gamma^{-1} \in H$.

פתרון: הכיוון $(\Leftarrow)$ הוא טריוויאלי. נראה רק את $(\Rightarrow)$. נניח כי לכל $\gamma \in \Gamma$, $a \in A$ מתקיים $\gamma a \gamma^{-1} \in H$. יהיו $g \in G, h \in H$ נתונים. הם נוצרים על ידי הקבוצות Γ ו־A, ולכן ניתן לבטא אותם כמכפלה סופית של איברים מקבוצות אלו. נסמן מכפלה זאת

$$\begin{aligned} g &= \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n \\ h &= a_1 a_2 \cdots a_k \end{aligned}$$

נתחיל ונראה כי $\gamma_n h \gamma_n^{-1} \in H$. ואכן מתקיים

$$\gamma_n h \gamma_n^{-1} = \gamma_n a_1 a_2 \cdots a_k \gamma_n^{-1} = \left(\gamma_n a_1 \gamma_n^{-1}\right)\left(\gamma_n a_2 \gamma_n^{-1}\right) \cdots \left(\gamma_n a_k \gamma_n^{-1}\right)$$

לפי הנתון, זו מכפלה של איברים ב־H, ולפיכך גם איבר ב־H. נמשיך בתהליך הזה באופן רקורסיבי על γ_{n-1} וכן הלאה עד γ_1 ונקבל לבסוף $ghg^{-1} \in H$. ■

8. אנו מגדירים את המרכז של חבורה $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G, xg = gx\}$.

(א) הוכיחו את המשפט: לכל G, $Z(G)$ היא תת־חבורה נורמלית של G.

פתרון: יהי $x \in G$. אזי לכל איבר $g \in Z(G)$ מתקיים $xg = gx$. ביחד עולה כי $xZ(G) = Z(G)x$. הטיעון הזה נכון לכל $x \in G$, ולכן $Z(G) \lhd G$. ■

(ב) הראו שעל מנת לדרוש שאיבר יהיה במרכז מספיק לדרוש חילופיות עם היוצרים של G.

פתרון: יהי $g \in G$ ויהי $x \in G$ נתונים. אזי ניתן לכתוב את x בעזרת היוצרים, $x = a_1 a_2 \cdots a_n$. נניח כי g מתחלף עם כל היוצרים של G, ובפרט עם $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. לפיכך

$$\begin{aligned} gx &= a_1 a_2 \cdots a_n x = a_1 a_2 \cdots x a_n = \cdots = a_1 x a_2 \cdots a_n \\ &= x a_1 a_2 \cdots a_n = xg \end{aligned}$$

בסך הכל, אנחנו מצאנו כי $gx = xg$ לכל $x \in G$, ולכן $g \in Z(G)$. ■

(ג) בעזרת הסעיף הקודם, מצאו את המרכז של D_n. (רמז: חשבו בנפרד עבור n זוגי ואי־זוגי).

פתרון: אנו יודעים כי $\{s, r\}$, הסיבוב והשיקוף, הם יוצרים של D_n. לפי הסעיף הקודם, די לנו לבדוק אילו איברים בחבורה מתחלפים עם הסיבוב והשיקוף. איבר כללי ב־D_n הוא מהצורה s^i או $s^i r$ כאשר $0 \le i < n$. נבדוק עבור אילו ערכי i איברים אלו מתחלפים עם כל היוצרים, s, r. נזכיר כאן כי ב־D_n מתקיים היחס $sr = rs^{-1}$.
נתחיל בבדיקת s^i.

i. $s^i s = s^{i+1} = s \cdot s^i$. שוויון זה מתקיים לכל i.

א'. $s^i r = s^{i-1} r s^{-1} = \cdots = r s^{-i}$. לכן השוויון $s^i r = r s^i$ הוא כאשר $i \equiv -i \pmod{n}$.

אם כן, איבר מהצורה s^i נמצא במרכז כאשר $2i \equiv 0 \pmod{n}$, דהיינו כאשר $n \mid 2i$. אם n אי־זוגי, הפתרון היחיד הוא $i = 0$. אם n זוגי אז הפתרונות הם $i = 0, \frac{n}{2}$.
נמשיך כעת בבדיקה עבור $s^i r$.

א'. $s^i r s = s^i \cdot s^{-1} r = s^{i-1} r$. מנגד $s \cdot s^i r = s^{i+1} r$. לכן שוויון מתקיים רק כאשר $i + 1 \equiv i - 1 \pmod{n}$, וזה נכון רק כאשר $n = 1, 2$. אבל אנחנו הנחנו כי $n \ge 3$, ולכן אין פתרון.

מכיוון שמצאנו כי $s^i r$ אינו מתחלף עם s, אין צורך לבדוק מתי $s^i r$ מתחלף עם r.
לסיכום, אם n זוגי, $Z(D_n) = \left\{id, s^{\frac{n}{2}}\right\}$. אם n אי־זוגי אז $Z(D_n) = \{id\}$. ■

(ד) נזכיר כאן משפט: G אבלית $\Leftrightarrow$ ${}^{G}/_{Z(G)}$ ציקלית. האם נכונה ההכללה הבאה: G אבלית $\Leftrightarrow$ ${}^{G}/_{Z(G)}$ אבלית?

פתרון: נביא דוגמא נגדית. נביט ב־D_4. חבורה זו איננה אבלית, והיא מסדר 8. לפי הסעיף הקודם, $Z\left(D_4\right)=\left\{id,s^2\right\}$ היא תת־חבורה מסדר 2. לכן, לפי לגרנז', $D_4/Z(D_4)$ היא חבורה מסדר 4, ולפיכך היא אבלית. אם כן מצאנו שעבור $G=D_4$ הכיוון $(\Rightarrow)$ איננו נכון. ■

9. נגדיר חבורת קווטרניונים Q_8 באופן הבא: $Q_8=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$. הכפל מוגדר באופן הבא:

- $1\cdot(\pm i,\pm j,\pm k)=(\pm i,\pm j,\pm k)=(\pm i,\pm j,\pm k)\cdot 1$.
- $(-1)\cdot(\pm i,\pm j,\pm k)=(\mp i,\mp j,\mp k)=(\pm i,\pm j,\pm k)\cdot(-1)$
- $ij=-ji=k$
- $jk=-kj=i$
- $ki=-ik=j$

כל שאר ההכפלות נובעות מאסוציטיביות.

(א) מלאו את טבלת הכפל של Q_8.

פתרון: את השורה והעמודה הראשונות אנו ממלאים לפי תכונת 1 כאיבר יחידה. השורה והעמודה של -1, חוץ מהמקרה $(-1)(-1)$ מפורשות בנתון. ניתן לראות כי אין איבר הפיך ל־-1 בין שבעת האיברים הידועים, ולכן $(-1)(-1)=1$. עד כה מילאנו את שתי העמודות הראשונות ואת שתי השורות הראשונות.
נתונים עוד שישה שוויונות. ניקח לדוגמא את $ij=k$. מתקיים, $i(-j)=-ij=-k$ ‏.$ij(-1)=k(-1)=-k$ באופן דומה $-ij=-k$ וכן ניתן להראות כי $(-i)(-j)=k$. בדרך זו ניתן לעבור על שאר השוויונות ולמלא את כל המכפלות חוץ מהמכפלות מהצורה $(\pm x)(\pm x)$ עבור $x\in\{i,j,k\}$. נרשום לבינתיים את הלוח כידוע לנו.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$			k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i			$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k			i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$			$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i		
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$		

מכיוון שבחבורה יש איבר הפיך, בכל שורה ובכל עמודה אנו צריכים לרשום כל איבר פעם אחת ויחידה. האיברים החסרים בכל שורה ובכל עמודה הם ±1. ננסה להשלים בעזרת אסוציטיביות את החסר. מתקיים $i^2j=i(ij)=ik=-j=(-1)j$. בחבורה ניתן לצמצם, ולכן נצמצם את j מימין, ונקבל $i^2=-1$. בנוסף, מתקיים

$$-1=i^2=i(jk)=(ij)k=k^2=k(ij)=(ki)j=j^2$$

נשלים את הטבלה בהתאם, ונקבל

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

מצאנו לוח כפל, כמבוקש. ניתן לעבור על כל שלישיה ולבדוק שמתקיימת אסוציטיביות. ■

(ב) מצאו את המרכז של Q_8.

פתרון: ניתן לעיין בטבלה, ולחפש שורה שהיא זהה לעמודה. אפשר גם לחזור לנתונים, ולגלות שם $ij \neq ji$ וגם $jk \neq kj$, ולכן i, j, k אינם במרכז. גם $-i, -j, -k$ אינם במרכז, משיקולים דומים. אבל נתון (כמעט בפירוש) ש־± 1 במרכז, ולכן $Z(G) = \{1, -1\}$. ■

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם כל תת־חבורה של G היא נורמלית, אזי G אבלית.

פתרון: נביא דוגמא נגדית, את Q_8. כל תת־חבורה של Q_8 היא מסדרים $1, 2, 4, 8$. באופן טריוויאלי, התת־חבורות מסדרים 1 ו־8 הן תת־חבורות נורמליות. התת־חבורות מסדר 4 הן נורמליות כי הן תת־חבורות מאינדקס 2, ולפיכך נורמליות. נותר רק לבדוק מה קורה עם התת־חבורות מסדר 2. חבורה מסדר 2 היא תמיד ציקלית, ולכן היא נוצרת על ידי איבר אחד שהוא מסדר 2. מבט בלוח הכפל לעיל יראה כי האיבר היחיד מסדר 2 ב־Q_8 הוא -1. אם כן, $\langle -1 \rangle = Z(G) \lhd G$. מצאנו כי כל התת־חבורות של G הן נורמליות ב־G, אבל G אינה אבלית. ■

10. בכל סעיף קבעו אילו מבין החבורות הן איזומורפיות. הסבירו קביעתכם.

(א) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ ו $\mathbb{Z}_{35}$.

פתרון: כן. ל־$\mathbb{Z}_{35}$ יש יוצר יחיד $[1]$ ול־$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ יש יוצר יחיד $(1, 1)$. נגדיר איזומורפיזם על ידי $[1] \mapsto (1, 1)$.

(ב) $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ ו $\mathbb{Z}_{49}$.

פתרון: לא. ב־$\mathbb{Z}_{49}$ יש יוצר יחיד $[1]$ שהוא מסדר 49, וב־$\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ אין איבר מסדר 49, ולכן הן אינן איזומורפיות.

(ג) $\mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}^*$.

פתרון: לא. ב־$\mathbb{R}$ כל איבר שאיננו 0 הוא מסדר ∞. לעומת זאת ב־$\mathbb{R}^*$ יש איבר מסדר 2, -1, ולכן הן אינן איזומורפיות.

(ד) $\mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}^+$. (ממשיים חיוביים עם פעולת כפל).

רמז: תזכרו בפונקציות מאינפי. (אילן בר־אילן!)

פתרון: כן. נגדיר איזומורפיזם $x \mapsto e^x$. זו פונקציה מוגדרת היטב, היא הפיכה על ידי לוגריתם. נותר להראות כי היא הומומורפיזם. ואכן $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

(ה) S_4 ו D_{12}.

פתרון: לא. ב־D_{12} יש איבר מסדר 12, הסיבוב הקטן ביותר. לעומת זאת, ב־S_4 אין איברים מסדר זה.

(ו) D_4 ו Q_8.

פתרון: לא. ב־D_4 יש חמישה איברים מסדר 2 (כל השיקופים וגם הסיבוב ב־$180°$). מנגד, ב־Q_8 יש רק איבר אחד מסדר 2, -1, ולכן הן אינן איזומורפיות.

■