$$f(q_1,\dots q_n ; \alpha_1,\dots,\alpha_n) = F^{2P}$$

$$\forall_i\ p_i = \frac{\partial F^{2P}}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

$$\beta_i = Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

$$f(q_1,\dots,q_n;\alpha_1,\dots\alpha_n; t)$$

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} ; \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

$$H' = \frac{\partial F}{\partial t} + H = \frac{\partial f}{\partial t} + H = \frac{\partial I}{\partial t} + H = 0$$

$$H' = 0$$

$$\dot\alpha_i = -\frac{\partial H'}{\partial \beta_i} = 0 \qquad \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = \dot\beta_i = 0$$

$$\alpha_i = const \qquad \beta_i = const$$

$$\beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(q_1 \dots q_n ; \alpha_1,\dots \alpha_n ; t)$$ ישנן n משוואות אלגבריות

אחרי גזירה והצבה של הקבוע $\beta_i=$ קבוע $\alpha_i=$ מקבלים

משוואות אלגבריות עבור q_i.

הרצאה 13 - הרצאה אחרונה :-(

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H = 0$$

כשיש H-J איך נמצא את I?

שיטת הפרדת משתנים

בהנתן Hamiltonian

$$H-J \rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} + H = 0$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial t} + H\left(q_1,\dots q_n ; \frac{\partial I}{\partial q_1}, \frac{\partial I}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial I}{\partial q_n} ; t\right)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H\left(\lambda_1\left(q_1,\frac{\partial I}{\partial q_1}\right); q_2\dots q_n ; \frac{\partial I}{\partial q_2}\dots,\frac{\partial I}{\partial q_n} ; t\right)$$

דוגמה:

$$H = \underbrace{q_1 \cdot p_1(1-p_1)}_{\lambda_1\left(q_1,\frac{\partial I}{\partial q_1}\right)} + q_2^2 + p_2\left(q_1 p_1 (1-p_1)\right)$$

$$\lambda_1\left(q_1 ; \frac{\partial I}{\partial q_1}\right)$$

$$H = \lambda_1 + q_2^2 + p_2(\lambda_1)$$

$$I = I'(q_2,\dots q_n) + I_1(q_1)$$ מוצאי נפרד

$$\Phi = \frac{\partial I}{\partial t} + H\left(\lambda_1\left(q_1\left(q_1, \frac{dI_1}{dq_1}\right); q_2 \ldots q_n, \frac{\partial I'}{\partial q_2}, \frac{\partial I'}{\partial q_3} \ldots \frac{\partial I'}{\partial q_n}, t\right)\right)$$

$$\Phi = 0 \qquad \lambda_1\left(q_1, \frac{dI_1}{dq_1}\right) = const$$

בגלל שאם הוא ישתנה אז כל הפונקציה תשתנה וה/ס צד יהיה לא נכון ולכן $\lambda_1 = const$

$$\text{I)} \quad \lambda_1\left(q_1, \frac{dI_1}{dq_1}\right) = const$$

$$\text{II)} \quad \frac{\partial I'}{\partial t} + H\left(q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial I'}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial I'}{\partial q_n}; t\right)$$

הצבתי פנימה את λ_1

פונקציה של $n+1$ משתנים + זמן

ממשיכים בצורה דומה עבור H החדש

דוגמה נוספת:

$$H = \sinh p_1 + \tan\left(p_2 (\sinh p_1 \cdot q_1)^2 q_2^2\right) + e^{8 p_2 (\sinh p_1 \cdot q_1)^4 q_2^4}$$

$$\lambda_1 = (\sinh p_1) q_1$$

$$H = \lambda_1 + \tan(p_2 q_2^2 \lambda_1^2) + e^{8 p_2^2 \lambda_1^4 q_2^4}$$

$$\lambda_2 = p_2 q_2^2$$

$$H = \lambda_1 + \tan(\lambda_2 \lambda_1^2) + e^{8 \lambda_2^2 \lambda_1^4}$$

אם אין תבנית שלא תלויה של עצמה היא אפשר לעשות הפרדת משתנים.

$$\lambda_2 = \frac{dI_2}{dq_2} \cdot q_2^2 = const$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\sinh\left(\frac{dI_1}{dq_1}\right) q_1 = \lambda_1$$

$$\frac{dI_1}{dq_1} = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\lambda_1}{q_1}\right)$$

$$I = \int \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\lambda_1}{q_1}\right) dq_1$$

$$\frac{dI_2}{dq_2} = \frac{\lambda_2}{q_2^2}, \qquad I_2 = \int \frac{\lambda_2}{q_2^2} dq_2 =$$

$$I = \int \frac{\lambda_2}{q_2^2} dq_2 + \int \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\lambda_1}{q_1}\right) dq_1$$

$$\cancel{\beta_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2}}$$

$$\beta_1 = \frac{\partial I}{\partial \lambda_1} \qquad \beta_2 = \frac{\partial I}{\partial \lambda_2}$$

$\beta_2 = \frac{\partial I}{\partial \lambda_2} = \int \frac{1}{q_2^2}\, dq_2$ $\qquad \beta_1 =$ הרבה יותר קשה לחשב.

הראינו ש H לא תלוי בצורה מפורשת בזמן.

$$I = I_0 - Et$$

$$H\left(q_1,\dots,q_n, \frac{\partial I_0}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial I_0}{\partial q_n}\right) = E$$

זו משוואת H-J עבור I_0.

מה קורה כש q_1 היא ציקלית?

$$H\left(q_2,\dots,q_n; \underbrace{\frac{\partial I}{\partial q_1}}_{const}, \frac{\partial I}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial I}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

$$\lambda_1\left(q_1, \frac{\partial I_1}{\partial q_1}\right) \qquad \lambda_1 = \frac{dI_1}{dq_1}$$

$$I = I' + I_1 \qquad I_1 = \lambda_1 q_1$$

כלומר

$$I = I' + \lambda_1 q_1$$

$$H\left(q_2,\dots,q_n; \frac{\partial I'}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial I'}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial I'}{\partial t} = 0$$

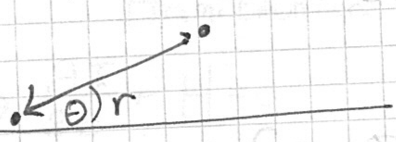
הקטנו במימד את דג.

Hamilton-Jacobi היא השיטה הכי חזקה בגלל שהיא מורידה מימדיות.

<u>דוגמה:</u> נתון פוטנציאל

$$U(r,\theta) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}$$

<u>בדו מימד</u> (r,θ)



$$H = \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{אנרגיה קינטית}} + U(r,\theta)$$

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right] - U(r,\theta)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \Rightarrow \dot r = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$H = \sum_i p_i \dot q_i - L = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2\right] + U(r,\theta)$$

$$= \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(r,\theta)$$

H לא תלוי מפורשות בזמן

$$I = I_0 - Et$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial I_0}{\partial r}\right)^2+\frac{\left(\frac{\partial I_0}{\partial \theta}\right)^2}{2mr^2}+a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}=E$$

$$p_r=\frac{\partial I_0}{\partial r}\ ;\ p_\theta=\frac{\partial I_0}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial I_0}{\partial r}\right)^2+a(r)+\frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\frac{\left(\frac{\partial I_0}{\partial \theta}\right)^2}{2m}+b(\theta)\right]}_{\lambda_\theta}=E$$

$$I_0=I_0'+I_\theta$$

$$\text{I)}\quad \frac{\left(\frac{dI_\theta}{d\theta}\right)^2}{2m}+b(\theta)=\lambda_\theta$$

$$\text{II)}\quad \frac{1}{2m}\left(\frac{dI_0'}{dr}\right)^2+a(r)+\frac{1}{r^2}\lambda_\theta=E$$

$$\text{I)}\quad \frac{dI_\theta}{d\theta}=\sqrt{2m[\lambda_\theta-b(\theta)]}$$

$$I_\theta=\int\sqrt{2m[\lambda_\theta-b(\theta)]}\,d\theta$$

$$\text{II)}\quad \frac{dI_0'}{dr}=\sqrt{2m\left[E-\frac{\lambda_\theta}{r^2}-a(r)\right]}$$

$$I_0'=\int\sqrt{2m\left[E-\frac{\lambda_\theta}{r^2}-a(r)\right]}\,dr$$

$$I=I_0-Et=I_0'+I_\theta-Et$$

$$I=\int\sqrt{2m\left[E-\frac{\underset{\text{קבוע.}}{\lambda_\theta}}{r^2}-a(r)\right]}\,dr+\int\sqrt{2m[\underset{\text{קבוע}}{\lambda_\theta}-b(\theta)]}\,d\theta-\underset{\text{קבוע}}{E}t$$

$$\frac{\partial I}{\partial E}=\beta_1\ ,\quad \frac{\partial I}{\partial \lambda_\theta}=\beta_2$$

$$\frac{\partial I}{\partial E}=\underset{\text{קבועים}}{\beta_1}=-t+\int\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{E-\frac{\lambda_\theta}{r^2}-a(r)}}\,dr$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda_\theta}=\underset{\text{קבועים}}{\beta_2}=\int\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\frac{2m}{r^2}\right)}{2\sqrt{2m\left[E-\frac{\lambda_\theta}{r^2}-a(r)\right]}}\,dr+\int\frac{m}{\sqrt{2m[\lambda_\theta-b(\theta)]}}\,d\theta$$

נמצא את היחס בין r לבין θ וסיימנו.