

תרגיל מספר 8:

שאלה 1:

רשמו את  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

- א. כמכפלה של מחזורים זרים.
  - ב. כמכפלה של חלופים.
- האם  $\sigma$  זוגית או אי זוגית?

שאלה 2:

נתונה התמורה הבאה ב-  $S_7$ :  $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

- א. רשמו אותה כמכפלת מחזורים זרים, ומצאו את הסדר שלה.
- ב. האם  $a$  שייכת ל-  $A_7$ ?
- ג. מה הסדר של  $a^{13}$ ?
- ד. תהי  $b = (1\ 5\ 7\ 6)$ . חשבו את  $aba^{-1}$ .

שאלה 3:

תהי  $V = \{Id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$  תת קבוצה ב-  $A_4$ . הוכיחו ש-  $A_4/V$  היא חבורה ציקלית.

שאלה 4:

- א. מהו המספר של התמורות מהצורה  $(ab)(cd)$  ב-  $S_n$  כאשר  $(ab)$  ו-  $(cd)$  חלופים זרים?
- ב. כמה איברים ב-  $S_{10}$  מקיימים את המשוואה:  $x^3 = Id$ ?

שאלה 5:

אומרים שתמורה  $\tau$  היא תמורה מסדר  $k$  אם  $e = \underbrace{\tau \circ \tau \circ \dots \circ \tau}_{k \text{ times}}$  וכן  $\tau^{k-1} \neq e$  כאשר  $e$

- היא תמורת הזהות.
- א. כמה תמורות מסדר 3 יש ב-  $S_2$ ?
- ב. כמה תמורות מסדר 3 יש ב-  $S_3$ ?
- ג. כמה תמורות מסדר 3 יש ב-  $S_4$ ?
- ד. מהו סדר התמורה בשאלה 1? הציעו דרך מהירה לחשב זאת עפ"י פירוק התמורה למחזורים זרים.

שאלה 6:

כמה מחזורים מסדר  $r$  קיימים ב-  $S_n$  ( $r \leq n$ )?

שאלה 7:

- א. מצא תת-חבורה מסדר 45 ב-  $S_{15}$ .
- ב. יהיו  $f = (1\ 4\ 3)(2\ 8)(5\ 7)$  ו-  $g = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7)$  תמורות ב-  $S_8$ . רשמו את כל האיברים (כמכפלות של מחזורים זרים) בתת החבורות הציקליות שהן יוצרות ב-  $S_8$ .

שאלה 8:

יהיו  $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_r), \beta = (b_1 b_2 \dots b_s) \in S_n$  מחזוריים זרים מצאו חילוף

$\gamma \in S_n$  כך ש  $\alpha \cdot \gamma \cdot \beta$  הוא מחזור והראו שגם  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$  - ו  $\gamma \cdot \alpha \cdot \beta$  הם מחזוריים.

יהי  $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_r) \in S_n$  מחזור מאורך  $r > 2$ . הוכיחו כי

א.  $\alpha \cdot \alpha$  הוא מחזור או"א  $r$  אי זוגי.

ב. אם  $r$  אי זוגי, הוכיחו כי קיים מחזור  $\beta$  מאורך  $r$  כך ש  $\alpha = \beta \cdot \beta$  (רמז:  $\alpha =$

$$\alpha^{r+1}$$

ג. אם  $r$  ראשוני אז כל חזקה של  $\alpha$  היא מחזור.

שאלה 9:

תהי  $G$  חבורה סופית שיש לה אוטומורפיזם  $\varphi$  עם נקודת שבת יחידה (כלומר

$$\varphi(x) = x \iff x = 1$$

הראו שאם  $\varphi^2 = id$  אז  $G$  אבליה.

רמז: הראו שאפשר להציג כל איבר של  $G$  כ- $x^{-1}\varphi(x)$  והסיקו ש- $\varphi(a) = a^{-1}$

לכל  $a \in G$ .

שאלה 10:

תהי  $G$  חבורה סופית, ויהי  $\varphi$  אוטומורפיזם של  $G$  המעביר יותר משלושה רבעים

של אברי  $G$  להפכי שלהם (בסימנים:  $|\{x | \varphi(x) = x^{-1}\}| > \frac{3|G|}{4}$ ).

הראו ש- $\varphi(a) = a^{-1}$  לכל  $a \in G$ .

שאלה 11:

הראו כי לכל  $n \geq 3$ ,  $D_n$  איזומורפית לתת-חבורה של  $S_n$ .