הרצאת חזרה

הועלה על הלטך ע"י בנימין לוין וניר שורץ

20 באוקטובר 2014

הערות, הארות ותיקונים אנא לשלוח ל$eyenir@gmail.com$.

על המבחן

- משך המבחן 3 שעות
- יהיו כלולות בו שאלות במבנה של צבירה עד 105 נקודות (שאלות עם מבנה משתנה)
- יכללו שאלות סטנדרטיות (כולל אנליטית)
- אחת מהשאלות מתרגילי הבית.

0.1 גאומטריה אנליטית

סיווג תבניות ריבועיות (ב$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$)מהצורה $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$. מוצאים ע"ע, השלמה לריבוע ומקבלים לרוב תבנית

$$\alpha\left(x-\beta\right)^2 + \gamma\left(y-\delta\right)^2 = \varepsilon \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) + \ldots$$

ובדומה ניתן לסווג לפי הע"ע גם ב־3 מימדים.

0.2 גאומטריה דיפרנציאלית

- הסכם הסכימה של איינשטיין

$$\begin{aligned} a_i b^i &= \sum_i a_i b^i \\ g_{ij} v^i u^j &= \sum_{i,j} g_{i,j} v^i u^j \end{aligned}$$

- עקומות $\gamma : t \to \mathbb{R}^2$ מתאר את המקום ביחס לזמן ואילו הנגזרת γ' מתארת את מהירות ההתקדמות.

- אורך עקומה $s = \int_0^t ||\gamma(t)||dt$. ניתן להפוך ולקבל את $t(s)$ ואת $\gamma(s)$ ־ תיאור המיקום על פני העקומה בפרמטריזציה הטבעית שמתארת את המרחק מזמן האפס לנקודה זו. חשוב לציין שלא תמיד ניתן למצוא פרמטריזציה טבעית. נסמן $\hat{T} = \dot{\gamma}$ כבתור נגזרת לפי פרמטר טבעי (כאמור בניגוד ל־γ' שהיא לפי פרמטר כללי). $\ddot{\gamma} = \kappa\hat{N}$. בנוגע לביטוי המקביל בפרמטריזציה כללית הביטו בחוברת של ברק שושני. הוקטור הנורמלי יוצר מערכת צירים ימנית איתו:

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

בשני מימדים יש סימן לעקמומיות (חיובי או שליל עם או נגד כיוון השעון). בשלושה מימדים אין משמעות לסימן אך יש משמעות לτהפיתול.

- משוואות פרנה:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \kappa\hat{N} \\ \dot{N} &= -\kappa\hat{T} \end{aligned}$$

$$|\kappa| = \left\|\dot{T}\right\| = |\dot{\gamma}|$$

ובשלושה מימדים שוב נוצרת מערכת ימנית.

$$\kappa\hat{N} = \dot{T}$$

היכן שבוחרים κ חיובי.

$$\dot{N} = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B}$$

או באופן שקול:

$$\left\langle \dot{N} + \kappa\hat{T}, \hat{B} \right\rangle = \tau$$

היכן ש$\hat{B}$ הוא הוקטור הבינורמלי שניתן למצוא ע"י

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

- משפט קושי:

$$\int_M \kappa ds = 2\pi\chi(M)$$

ועבור עקום ז'ורדן, ז"א עקום שלא חותך את עצמו, $\chi(M) = \pm 1$ בהתאם לכיוונו. לדוגמה עבור כל שקול טופולוגית למעגל $\int \kappa ds = 2\pi$. אם קיימים "שפיצים":

$$\sum_I \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa ds + \sum_i \alpha_i = 2\pi$$

היכן שα_i הן הזוויות החיצוניות "שהשפיצים" יוצרים (בעצם זה נובע מכך שניתן להסתכל על השפיץ כמעין קטע מעגל קטן). אפשר למצוא את χ גם מתוך כמות הפעמים שמקיף הוקטור המשיק את ה-0.

* משפט גאוס לא יעבוד בחרוט כיוון ששם יש נקודת סינגולריות בה ישנו ריכוז עקמומיות אך העקמומיות של החרוט תהיה אפס.

- משטחים
  - משטח מתואר ע"י $r(u,v), r:\underset{\subseteq\mathbb{R}^2}{D}\to\underset{\subseteq\mathbb{R}^3}{M}$.
  - ניתן לתיאור ע"י איחוד מפות. צריך להזהר עם ההעתקה הסטיאוגרפית כיוון והיא מחזורית ולא עובדת בקטבים (לא חח"ע שם).
  - היעקוביאן $dr\in\mathbb{R}^{2\times3}$ ודורשים שהוא יהיה מ rank מלא (ז"א שתי שורות בת"ל). ניתן לקבל את המטריקה הרימנית ע"י

$$G=dr^t dr$$

וכן:

$$S=\int\sqrt{g_{ij}\gamma^i\gamma^j}dt$$

לדוגמה:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \left(t,t^2\right)\\ u &= \gamma^{1'}=1\\ v &= \gamma^{2'}=2t\\ g_{ij} &= \begin{pmatrix}R^2 & 0\\ 0 & R^2\sin^2 u\end{pmatrix}\\ S &= \int_0^T\sqrt{R^2+R^2\sin^2 t\,(2t)^2}dt\end{aligned}$$

(זהו אכן האורך) והשטח הוא:

$$\iint\sqrt{\det g}dudv$$

מיפוי גאוס:

$$\rho:M\to S^2$$

$$\hat{n}=\frac{r_u\times r_v}{\|r_u\times r_v\|}$$

זו תכונה אקסטרינזית כיוון שהוא מתאר את כיוון השיכון ב$\mathbb{R}^3$. התבנית היסודית השנייה מוגדרת ע"י

$$\begin{aligned}B_{ij} &= \langle n_i,r_j\rangle=-\langle n,r_{ij}\rangle\\ S &= G^{-1}B\end{aligned}$$

הנקראת תבנית ווינגרטן ומאפשרת לחשב עקמומיות של עקומה במפה ע"י לקיחת הוקטור הנורמל והכפלה במטריצה S אז כל כיוון נותן את העקמויות ביכוון זה וסה"כ את עקמומיות העקומה ב$\mathbb{R}^3$. העקמומיות (הפנימית = עד כמה המשטח רחוק ממשטח אוקלידי):

$$\kappa = \det S$$

העקמומיות הממוצעת:

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(S)$$

משטחים עם שפה הם בעלי עקמומית ממוצעת אפס (לדוגמה חישוק שנטבל במי סבון).

* Theorema Agregium נותנת דרך נוספת לבטא את העקמומיות באופן נוסף אך בלתי נוח.

– סימני כרסיטופל Γ_{ij}^{k}- ניתנים לחישוב דרך הנוסחאות מברקשושני.

– חשוב לזכור שמערכת המשוואות $\begin{cases} \ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0 \\ g_{ij}\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 1 \end{cases}$ נכונה עבור קורדינטות המפה ולא האמיתיות (המשוואה האחרונה מחליפה את אחת מהמשוואות העליונות).

- נגזרת לי היא נגזרת של פונקציה סקלרית לפי שדה או נגזרת של שדה וקטורי אחד לפי שדה שני. נגזרת קוריאנטית היא לפי הקואורדינטות.

$$x^i_{;j} = x^i_{,j} + \Gamma^i_{jk} x^k$$

(בסימונים הנ"ל ";" היא נגזרת לי ו"," היא נגזרת רגילה).

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{Dt}\dot{\gamma}^i \equiv \ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^i_{;j}\dot{\gamma}^i \\ [a,b]^i &= a^i_{,j} b^j - b^i_{,j} a^j \\ L_a f &= f_{,i} a^i \end{aligned}$$

- דוגמה לסיכום הנושא:

$$\begin{aligned} X &= \left(\cos u, v^2\right) \\ X^1_{,1} &= -\sin u \\ X^1_{,2} &= 0 \\ X^2_{,1} &= 0 \\ X^2_{,2} &= 2v \end{aligned}$$

עבור $\Gamma^1_{11} = 3, \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{21} = 4,\ \Gamma^2_{ij} = 0,\ \Gamma^1_{22} = 0$.

$$\begin{aligned} X^1_{;1} &= X^1_{,1} + \Gamma^1_{11} X^1 + \Gamma^1_{21} X^2 \\ &= -\sin u + 3\cos u + uv^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= (uv, u+v) \\
y^1_{,1} &= v \\
y^1_{,2} &= u \\
y^2_{,1} &= 1 \\
y^2_{,2} &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[x,y]^1 &= X^1_{,1}y^1 + X^1_{,2}y^2 - y^1_{,1}X^1 - y^1_{,2}X^2 \\
&= -\sin u \cdot uv + 0 - \ldots
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathcal{GOODLUCK}\smile}$