פתרון תרגיל בית 7, גיאומטריה אוקלידית ואנליטית, מתרגלת: זהבית צבי

עבור כל אחת מהתבניות הבאות ענו על הסעיפים הבאים :

א. כתבו את התבנית הנתונה בעזרת מטריצה סימטרית מתאימה.

ב. מצאו ע״ע וו״ע של המטריצה.

ג. לכסנו אורתוגונלית את המטריצה מסעיף ב׳.

ד. השתמשו בהחלפת משתנים $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, כאשר P היא המלכסנת האורתוגונלית שמצאתם בסעיף ג׳, על מנת להגיע לצורה של התבנית שבה לא מופיע הגורם xy .

ו. כתבו את התבנית בצורה קנונית.

1. $x^2-2xy+y^2+x+y=0$
2. $52x^2+73y^2+72xy+120x+160y+75=0$
3. $5x^2+8xy+5y^2+x+3y=0$
4. $9x^2+24xy+16y^2+5x-15y-8=0$
5. $2x^2+2xy+2y^2+2x+2y-2=0$

פתרון

1. <u>שלב א׳:</u> המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא : $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=-1$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.
התבנית נכתבת כך :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}=0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבורה לכסון אורתוגונלי.
<u>שלב ב׳:</u> נמצא את הערכים העצמים ע״י פתרון המשוואה : $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=1-2\lambda+\lambda^2-1=\lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow \lambda_1=0\,,\,\lambda_2=2$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2=0$ ו- $\lambda_1=0\neq\lambda_2=2$, לכן זו פרבולה.
נמצא את הווקטורים העצמים ע״י פתרון המערכת : $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע״ע שמצאנו.
עבור $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x-y=0\Rightarrow x=y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי : $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נרמל: $\|v_1\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad -x-y=0 \Rightarrow x=-y$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

נרמל: $\|v_2\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

<u>שלב ג':</u> המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

<u>שלב ד':</u> נציב $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t = \left[P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right]^t \Rightarrow \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}P^t$

במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X} + \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}}_{D}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{P^t}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2y'^2 + \sqrt{2}x' = 0 \ (:2) \Rightarrow y'^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x'$$

זו צורה קנונית של פרבולה שוכבת.

2. <u>שלב א':</u> המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A = \begin{pmatrix}52 & 36\\ 36 & 73\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12} = a_{21} = 36$ מייצגים מקדמים של $xy = yx$ בהתאמה.

התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}52 & 36\\ 36 & 73\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X} + \begin{pmatrix}120 & 160\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X} + 75 = 0 \quad (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבורה לכסון אורתוגונלי.

<u>שלב ב':</u> נמצא את הערכים העצמיים ע"י פתרון המשוואה: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}52-\lambda & 36\\ 36 & 73-\lambda\end{vmatrix}=(52-\lambda)(73-\lambda)-1296=3796-52\lambda-73\lambda+\lambda^2-1296=\lambda^2-125\lambda+2500=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=100\,,\,\lambda_2=25$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה. הו"ע המתאימים יהיו מלכתחילה אורתוגונליים לפי משפט.

נמצא את הווקטורים העצמיים ע"י פתרון המערכת: $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=100$:

$$\begin{pmatrix}-48 & 36\\ 36 & -27\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{9}R_2\to R_2}{\overset{-\frac{1}{12}R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 4 & -3\end{pmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ 4x-3y=0\Rightarrow x=\frac{3}{4}y$$

נבחר שרירותית $y=4$ ונקבל מיד $x=3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_1\|=\left\|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ והווקטור המנורמל: $u_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=25$:

$$\begin{pmatrix}27 & 36\\ 36 & 48\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{12}R_2\to R_2}{\overset{\frac{1}{9}R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ 3x+4y=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y=-3$ ונקבל מיד $x=4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_2\|=\left\|\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$ והווקטור המנורמל: $u_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

<u>שלב ג':</u> המטריצה המלכסנת היא: $P=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D=\begin{pmatrix}100 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}$.

<u>שלב ד':</u> נציב $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t=\left[P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right]^t\Rightarrow\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}P^t$

במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix} 120 & 160 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+75=0\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}}_{D=P^tAP}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix} 120 & 160 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 200 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+75=0\Rightarrow$$

$$100x'^2+25y'^2+200x'=-75$$

כעת נבצע השלמה לריבוע:

$$100x'^2+25y'^2+200x'=-75\Rightarrow\underbrace{\left\{\Big(\underbrace{10x'}_{u}\Big)^2+2\cdot\underbrace{10x'}_{u}\cdot\underbrace{10}_{v}+\underbrace{10^2}_{v}\right\}}_{(u+v)^2}-10^2+25y'^2=-75\Rightarrow$$

$$(10x'+10)^2+25y'^2=-75+100=25\Rightarrow\big(10(x'+1)\big)^2+25y'^2=25\Rightarrow100(x'+1)^2+25y'^2=25\ (:25)$$

$$\Rightarrow\frac{(x'+1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y'^2}{1}=1$$

נעשה החלפת משתנים (הזזה): $\tilde{x}=x'+1\,,\,\tilde{y}=y'$ ונקבל צורה קנונית: $\frac{\tilde{x}^2}{\Big(\underbrace{\frac{1}{2}}_{a}\Big)^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\underbrace{1}_{b}^2}=1$ - זו אליפסה

יחסית לציר ה $\tilde{y}$, כי $b>a$.

3. <u>שלב א':</u> המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=4$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.

המשוואה הנתונה נכתבת כך: $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\underbrace{A}_{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0\ \ (*)$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבורה לכסון אורתוגונלי.

<u>שלב ב':</u> נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)^2-16=25-10\lambda+\lambda^2-16=\lambda^2-10\lambda+9=0\Rightarrow\lambda_1=9\,,\,\lambda_2=1$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת : $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=9$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \; 4x-4y=0 \Rightarrow x=y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי : $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל : $\|v_1\|=\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל : $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; 4x+4y=0 \Rightarrow x=-y$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי : $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ננרמל : $\|v_2\|=\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל : $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

<u>שלב ג' :</u> המטריצה המלכסנת היא : $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא : $D=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>שלב ד' :</u> נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t=\left[P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right]^t \Rightarrow (x \quad y)=(x' \quad y')P^t$.

לאחר ההצבה מקבלים :

$$(x' \quad y')\underbrace{P^tAP}_{D=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\underbrace{(1 \quad 3)\underbrace{P}_{P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}}_{\left(\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \quad -\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\right)}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=0 \Rightarrow 9x'^2+y'^2+2\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'=0$$

כעת נעשה השלמות לריבוע בכדי להכניס מחוברים ממעלה ראשונה לתוך סכום (או הפרש) ריבועים בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר $(u\pm v)^2=u^2\pm 2uv+v^2$:

$$\left\{\underbrace{(3x')}_{u}^2+2\underbrace{(3x')}_{u}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_{v}+\underbrace{\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}}_{v}\right)^2}_{\frac{2}{9}}\right\}-\frac{2}{9}+\left\{\left(\underbrace{y'}_{u}\right)^2-2\cdot\underbrace{y'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{v}+\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{v}\right)^2}_{\frac{1}{2}}\right\}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow$$

$$\left(3x'+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2}{9}+\frac{1}{2}=\frac{13}{18}\Rightarrow\left(3\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)\right)^2+\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{13}{18}\Rightarrow$$

$$9\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{13}{18}\left(:\frac{13}{18}\right)\Rightarrow\frac{\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^2}{\frac{13}{162}}+\frac{\left(y'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{13}{18}}=1$$

נרשום בצורה קנונית: $\tilde{x}=x'+\frac{\sqrt{2}}{9}$, $\tilde{y}=y'-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ונקבל: $\frac{\tilde{x}^2}{\underbrace{\frac{13}{162}}_{a^2}}+\frac{\tilde{y}^2}{\underbrace{\frac{13}{18}}_{b^2}}=1$. זו אליפסה.

4. <u>שלב א׳:</u> המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}9&12\\12&16\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=12$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.

התבנית נכתבת כך:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}9&12\\12&16\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}5&-15\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}-8=0\ \ (*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבורה לכסון אורתוגונלי.

<u>שלב ב׳:</u> נמצא את הערכים העצמים ע״י פתרון המשוואה: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}9-\lambda&12\\12&16-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)(16-\lambda)-144=144-9\lambda-16\lambda+\lambda^2-144=\lambda^2-25\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\ \lambda_2=25$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2=0$ ו- $\lambda_1=0\neq\lambda_2=25$, לכן זו פרבולה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע״י פתרון המערכת: $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע״ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix}9&12\\12&16\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{4}R_2\to R_2}{\overset{\frac{1}{3}R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}3&4\\0&0\end{pmatrix}\ \ 3x+4y=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}y$$

נבחר שרירותית $y=-3$ ונקבל מיד $x=4$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

נרמל: $\|v_1\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$ והווקטור המנורמל: $u_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = 25$:

$$\begin{pmatrix}-16 & 12\\12 & -9\end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\overset{-\frac{1}{4}R_1\to R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix}4 & -3\\4 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix}4 & -3\\0 & 0\end{pmatrix} \quad 4x-3y=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}y$$

נבחר שרירותית $y=4$ ונקבל מיד $x=3$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

נרמל: $\|v_2\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ והווקטור המנורמל: $u_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

<u>שלב ג׳:</u> המטריצה המלכסנת היא: $P = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 25\end{pmatrix}$.

<u>שלב ד׳:</u> נציב $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t = \left[P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right]^t \Rightarrow \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}P^t$

במשוואה (*) ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}9 & 12\\12 & 16\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X} + \begin{pmatrix}5 & -15\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X} - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 25\end{pmatrix}}_{D=P^tAP}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}5 & -15\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}}_{P}}_{\begin{pmatrix}13 & -9\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$25y'^2 + 13x' - 9y' - 8 = 0$$

נבצע השלמה לריבוע:

זו פרבולה שוכבת. אם נחליף משתנים: $\tilde{y} = y' - \frac{9}{50}$, $-\tilde{x} = \frac{881}{2500} - \frac{13}{25}x'$ נקבל צורה קנונית: $\tilde{y}^2 = -\tilde{x}$.

$$25y'^2+13x'-9y'-8=0\Rightarrow\left\{\left(\underbrace{5y'}_{u}\right)^2-2\cdot\underbrace{5y'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{9}{10}}_{v}+\left(\underbrace{\frac{9}{10}}_{v}\right)^2\right\}+13x'-8-\left(\underbrace{\frac{9}{10}}_{v}\right)^2=0\Rightarrow$$

$$\left(5y'-\frac{9}{10}\right)^2+13x'-\frac{881}{100}=0\Rightarrow\left(5\left(y'-\frac{9}{50}\right)\right)^2+13x'-\frac{881}{100}=0\Rightarrow 25\left(y'-\frac{9}{50}\right)^2+13x'-\frac{881}{100}=0\,(:25)\Rightarrow$$

$$\left(y'-\frac{9}{50}\right)^2+\frac{13}{25}x'-\frac{881}{2500}=0\Rightarrow\left(y'-\frac{9}{50}\right)^2=\frac{881}{2500}-\frac{13}{25}x'$$

נכתוב את הפרבולה בצורה קנונית כלומר רוצים להעביר אותה לראשית הצירים ולכן נקבל את המשוואה: החלפת משתנים היא: $\tilde{y}=y'-\frac{9}{50}$, $-\frac{13}{25}\tilde{x}=\frac{881}{2500}-\frac{13}{25}x'$ ונקבל: $\tilde{y}^2=-\frac{13}{25}\tilde{x}$

.5

<u>שלב א':</u> המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, כאשר נשים לב כי האיברים $a_{12}=a_{21}=1$ מייצגים מקדמים של $xy=yx$ בהתאמה.

המשוואה הנתונה נכתבת באמצעות המטריצה באופן הבא:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}2&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}-2=0\quad(*)$$

המטריצה אינה אלכסונית, לכן נבצע עבורה לכסון אורתוגונלי.

<u>שלב ב':</u> נמצא את הערכים העצמים ע"י פתרון המשוואה: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=4-4\lambda+\lambda^2-1=\lambda^2-4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_1=3\,,\,\lambda_2=1$$

ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה.

נמצא את הווקטורים העצמים ע"י פתרון המערכת: $(A-\lambda I)v=0$ לכל ע"ע שמצאנו.

עבור $\lambda_1=3$:

$$\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2\to R_2}\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}\ -x+y=0\Rightarrow x=y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_1\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=1$:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\quad x+y=0\Rightarrow x=-y$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=1$ ומקבלים וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

ננרמל: $\|v_2\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ והווקטור המנורמל: $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

<u>שלב ג':</u> המטריצה המלכסנת היא: $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא: $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$.

<u>שלב ד':</u>

נציב $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t=\left[P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right]^t\Rightarrow\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}P^t$ ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}2&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}-2=0\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}}_{D=P^tAP}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}2&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{P}}_{\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-2=0\Rightarrow$$

$$3x'^2+y'^2+2\sqrt{2}x'-2=0$$

נבצע השלמה לריבוע:

$$3x'^2+y'^2+2\sqrt{2}x'-2=0\Rightarrow\left\{\left(\underbrace{\sqrt{3}x'}_{u}\right)^2+2\cdot\underbrace{\sqrt{3}x'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}_{v}+\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}_{v}\right)^2\right\}+y'^2-2-\frac{2}{3}=0\Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{3}x'+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2+y'^2=\frac{8}{3}\Rightarrow\left(\sqrt{3}\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)^2+y'^2=\frac{8}{3}\Rightarrow3\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+y'^2=\frac{8}{3}\left(:\frac{8}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}{\frac{8}{9}}+\frac{y'^2}{\frac{8}{3}}=1$$

נעשה החלפת משתנים (הזזה): $\tilde{y}=y'$, $\tilde{x}=x'+\frac{\sqrt{2}}{3}$ ונקבל צורה קנונית: $\frac{\tilde{x}^2}{\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{8}}{3}}_{a}\Big)^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{8}{3}}}_{b}\Big)^2}=1$ - זו אליפסה

יחסית לציר ה $\tilde{y}$, כי $b>a$.