תרגיל בית 5 תורת גלואה - תשע"ח

1. תארו את חבורת גלואה של ההרחבות הבאות:

א. ${}^{E}/_{\mathbb{Q}}$ כאשר E הוא שדה הפיצול של x^5-1 מעל $\mathbb{Q}$.

ב. ${}^{E}/_{\mathbb{Q}}$ כאשר E שדה הפיצול של x^4-2 מעל $\mathbb{Q}$.

ג. ${}^{E}/_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}$ כאשר E הוא שדה הפיצול של x^4+1 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
היעזרו בשורש היחידה $\rho_8=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2. יהי $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ ונסמן ב E את שדה הפיצול שלו. נניח כי ל$f(x)$ יש שורש מרוכב (שאינו ממשי). הוכיחו כי $|\mathrm{Gal}\,(E/\mathbb{Q})|$ הוא זוגי.
(הנחייה: מצאו איבר מסדר זוגי).

3. יהי $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ פולינום מדרגה 3 ונסמן ב E את שדה הפיצול שלו. נניח כי ל$f(x)$ יש שורש מרוכב שאיננו ממשי, הוכיחו כי $\mathrm{Gal}\,(E/\mathbb{Q})\cong S_3$.

4. יהיו K_1,K_2 שתי הרחבות של השדה F, כך שקיים איזומורפיזם $\varphi\colon K_1\to K_2$ המקיים $\varphi(F)=F$.
הוכיחו כי $\mathrm{Gal}\,(K_1/F)\cong\mathrm{Gal}\,(K_2/F)$.

5. יהי F שדה ממאפיין $p\neq 0$, כך ש ${}^{F}/_{\mathbb{Z}_p}$ היא הרחבה סופית. הוכיחו כי $\sigma(x)=x^p$ הוא איבר של $\mathrm{Gal}\,(F/\mathbb{Z}_p)$.