נפתור את המבחן מהקישור הבא.

א. חשבו $\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^x$.

$$\lim_{x\to 0^+}(\tan(x))^x = \{0^0\} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln((\tan x)^x)}$$

נחשב את גבול המעריך,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\tan x = \{0\cdot(-\infty)\} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{x}} = \left\{-\frac{\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\tan(x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\cos^2(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} -x\cdot\frac{x}{\sin(x)}\cdot\frac{1}{\cos(x)} = 0$$

סה"כ הגבול הוא

$$e^0 = 1$$

נסיון לWin שעכשיו שמתי אליו לב

$$(\tan(x))^x = \left(\frac{\tan(x)}{x}\cdot x\right)^x = \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right)^x}_{\to 1^0=1}\cdot x^x$$

ב. חשבו: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+6}\right)^n$

כיוון ש $\frac{n+2}{n+6}\to 1$ אפשר להשתמש בכלל הe

$$\left(\frac{n+2}{n+6}\right)^n \to e^{\lim n\cdot\left(\frac{n+2}{n+6}-1\right)}$$

$$\lim n\cdot\left(\frac{n+2}{n+6}-1\right) = \lim -\frac{4n}{n+6} = -4$$

סה"כ הגבול הוא $e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

3. מצאו כל $\alpha \in \mathbb{R}$ כך שהטור $\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5}}{n^\alpha}$

א. מתכנס.

ב. מתכנס בהחלט.

ננסה לחשב את הגבול של האיבר הכללי של הטור

$$\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5}}{n^\alpha} = \frac{10}{n^\alpha\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}\right)} = \frac{10}{n^\alpha\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}\right)}$$

בעצם זה חבר של הטור $\sum \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

ולכן כאשר $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ הטור הזה מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס בהחלט. (כלומר כאשר $\alpha > \frac{1}{2}$)

ובשאר התחום הטור הזה מתבדר ולכן הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

שוב נחזור לחשב את גבול האיבר הכללי של הטור, הפעם בשביל לייבניץ

$$\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{10}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}}$$

כאשר $\alpha + \frac{1}{2} \leq 0$ הסדרה אינה שואפת לאפס. והטור מתבדר.

כאשר $\alpha + \frac{1}{2} > 0$ הסדרה שואפת לאפס.

כאשר $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ היא מונוטונית יורדת כי

$$\frac{10}{n^\alpha\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}\right)}$$

כאשר n גדל המכנה גדל.

ולכן לפי לייבניץ הטור המקורי מתכנס וסה"כ מתכנס בתנאי בתחום זה.

לבסוף אם $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ האיבר הכללי הוא מהצורה

$$\frac{10 \cdot n^{-\alpha}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}}$$

נחקור את הפונקציה הזו ונראה שהיא יורדת החל משלב מסויים, ולכן מדובר בטור לייבניץ

$$f(x) = \frac{10 \cdot x^{-\alpha}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}$$

$$f'(x) = \frac{10}{(\quad)^2} \cdot \left(-\alpha x^{-\alpha-1}\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}\right) - x^{-\alpha}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}}+\frac{1}{2\sqrt{x-5}}\right)\right) =$$
$$= \frac{10x^{-\alpha}}{(\quad)^2} \cdot \left[-\frac{\alpha}{x}\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}}+\frac{1}{2\sqrt{x-5}}\right)\right]$$

המטרה: להראות שהביטוי הבא שלילי החל משלב מסויים

$$\frac{-\alpha}{x}\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}}+\frac{1}{2\sqrt{x-5}}\right) \le -\alpha\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+5}}{x} - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\right) =$$
$$= \frac{-2\alpha\sqrt{x+5}}{x} - \frac{1}{\sqrt{x+5}} = \frac{-2\alpha x+5-x}{x\sqrt{x+5}} = \frac{5-x(1+2\alpha)}{2x\sqrt{x+5}}$$

המונה שואף למינוס אינסוף כי $1+2\alpha>0$ ולכן הביטוי אכן שלילי החל משלב מסויים!

סיכום השאלה:

$\frac{1}{2}<\alpha$ מתכנס בהחלט

$-\frac{1}{2}<\alpha\le\frac{1}{2}$ מתכנס בתנאי

$\alpha\le-\frac{1}{2}$ מתבדר

5. נניח שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת ובעלת נגזרת שנייה רציפה $f''(x)$ בקטע $[0,3]$. עוד נניח ש- $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, $f(2)=5$ ו- $f(3)=8$. הוכיחו שקיים $c\in[0,3]$ כך ש- $f''(c)=1$. הדרכה: אפשר להסתמך על משפט לגרנג', ז.א. על משפט הערך הממוצע.

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h''(x)=f''(x)-1$

אנחנו רוצים להראות כי הנגזרת השנייה מתאפסת בנקודה כלשהי.

נביט בקדומות

$$h'(x)=f'(x)-x$$

$$h(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$$

נציב את הנקודות הנקודות

$$h(0)=0$$
$$h(2)=5-2$$
$$h(3)=8-\frac{9}{2}$$

שיפוע המיתר בין קצות הקטע $[0,2]$ הוא

$$\frac{h(2)-h(0)}{2}=\frac{3}{2}$$

שיפוע המיתר בין קצות הקטע $[2,3]$ הוא

$$\frac{h(3)-h(2)}{3-2}=\frac{1}{2}$$

לפי לגראנז' קיימות

$$0<t_1<2$$
$$2<t_2<3$$

כך ש

$$h'(t_1)=\frac{3}{2}$$

$$h'(t_2)=\frac{1}{2}$$

לכן שוב לפי לגראנז', קיימת

$$t_1<t_3<t_2$$

עבורה

$$h''(t_3)=\frac{h'(t_2)-h'(t_1)}{t_2-t_1}<0$$

כעת, $h'(0)=f'(0)-0=0$ ולכן לפי לגראנז' קיימת

$$0<t_4<t_1$$

כך ש

$$h''(t_4)=\frac{h'(t_1)-h'(0)}{t_1-0}=\frac{3}{2t_1}>0$$

ולפי משפט ערך הביניים, כיוון שh'' רציפה ופעם מעל הציר ופעם מתחת לציר היא חותכת את הציר.

בעצם, נדמה שיש נתון מיותר נבדוק:

לא השתמשנו בכך ש $f''(0)=0$. הפעם נשתמש בנתון זה, אך נשמיט את הנתון לפיו $f(3)=8$

נביט בפונקציה

$$h(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$$

$$h'(x)=f'(x)-x$$

$$h''(x)=f''(x)-1$$

כעת

$$h''(0)=f''(0)-1=-1<0$$

כמו כן,

$$h'(0) = f'(0) - 0 = 0$$

לפי לגראנז' קיימת נקודה $t \in (0,2)$ כך ש

$$h'(t) = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{3 - 0}{2} = \frac{3}{2}$$

לפי לגראנז' קיימת נקודה $c \in (0,t)$ בה

$$h''(c) = \frac{h'(t) - h'(0)}{t - 0} = \frac{\frac{3}{2} - 0}{t} > 0$$

ושוב לפי ערך הביניים על h'' סיימנו.