

# שאלת אתגר 4 – 112-88 אלגברה לינארית 1

## סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

שאלת האתגר הזו הגיעה בעקבות שאלה ששאלתם אותי בתרגול: האם יש קשר בין מטריצות סימטריות ליחסים סימטריים?

**הגדרה.** תהי  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  קבוצה, ויהי  $R \subseteq S \times S$  יחס על  $S$ . נגדיר את המטריצה המתאימה לו להיות מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  שאיבריה הם

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i < j \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

(באופן דומה, אם נתונה מטריצה שאיבריה הם 0 ו-1, אפשר להגדיר יחס על  $S$  לפי הנוסחה  $i < j \iff a_{ij} = 1$ ).

**שאלה 1.** עבור הקבוצות הבאות והיחסים הבאים, מצאו את המטריצה המתאימה להם (כאשר  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ):

א. יחס הזהות  $R = \{(a, a) | a \in S\}$  על  $S$ .

ב. היחס המלא:  $R = S \times S$ .

ג. היחס הריק על  $S$ :  $R = \emptyset$ .

ד. היחס ה"רגיל" על  $S = \{1, 2, 3\}$  (כלומר,  $1 < 2 < 3$ ).

**שאלה 2.** עבור המטריצות הבאות, קבעו לאיזה יחס הן מתאימות על  $\{1, 2, 3\}$ :

א.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ב.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ג.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**שאלה 3.** הוכיחו:  $R$  סימטרי אם ורק אם  $A$  סימטרית (וזה הקשר בין המושגים  $\odot$ ).

**שאלה 4.** נסו למצוא קריטריוני "אם ורק אם" במונחי מטריצות, כמו בשאלה הקודמת, לתנאים הבאים:

א. היחס  $R$  רפלקסיבי.

ב. היחס  $R$  אנטי-רפלקסיבי.

ג. היחס  $R$  אנטי-סימטרי.

ד. היחס  $R$  טרנזיטיבי.

ה. אם  $R$  ו- $R'$  יחסים, מצאו קריטריון עבור התנאי  $R' \subseteq R$ .

ו. אם  $R$  ו- $R'$  יחסים, מצאו קריטריון עבור התנאי  $R' = R^c$ .