בס"ד

תירגול 7 באלגברה לינארית

הנושא: צורת ז'ורדן של מטריצות וטרנספורמציות ליניאריות שהפולינום האופייני שלהן מתפרק לגורמים ליניאריים

בשיעור הקודם ראינו את המשפטים הבאים:

משפט 1: כל מטריצה נילפוטנטית דומה למטריצת ז'ורדן נילפוטנטית.

משפט 2: אם מטריצה נילפוטנטית A דומה למטריצת ז'ורדן נילפוטנטית

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k} \end{pmatrix}$$

אז מס' הבלוקים - k ומימדיהם $n_1,\dots,n_k$ נקבעים חד-משמעית ע"י המטריצה הנתונה, וממילא A דומה למטריצת ז'ורדן G יחידה (עד כדי שינוי סדר הופעתם של בלוקי ז'ורדן ב-G).

טענה: תהי A מטריצה נילפוטנטית ונניח כי A דומה למטריצת ז'ורדן נילפוטנטית המורכבת מ-k בלוקים, כך שהבלוק הגדול ביותר הוא מסדר n_1. אז:

א. n_1 שווה לאינדקס הנילפוטנטיות של A.

ב. מס' הבלוקים k שווה ל-$n-\rho(A)$, כאשר n הוא הסדר של המטריצה A ו-$\rho(A)$ הוא דרגתה. [עד כאן - תזכורת]

בשיעור זה אנו נראה כיצד למצוא צורת ז'ורדן למטריצה שאינה נילפוטנטית.

הגדרה: א. בלוק ז'ורדן מסדר k, השייך לערך עצמי λ, הוא מטריצה ריבועית מסדר k בעלת הצורה:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

מטריצה זו תסומן ב-$J_k(\lambda)$.

ב. מטריצת בלוקים אלכסונית המורכבת מבלוקי ז'ורדן - $J_k(\lambda)$ (לאו דווקא שייכים לאותם ערכים עצמיים λ) נקראת מטריצת ז'ורדן.

הערה: הגדרה זו מכלילה את ההגדרה של בלוק ז'ורדן נילפוטנטי - J_k מהשיעור הקודם, שהרי בלוק ז'ורדן נילפוטנטי J_k הוא בלוק ז'ורדן $J_k(0)$ השייך לסקלר 0.

תירגול 10 - צורת ז'ורדן

(2)

הערה: סכום ערכים עצמ"ים של מטריצה A $= tr A$
מכפלת ע"ע " ___ " ___ $= |A|$

הערה: לגבי דרגה של מטר':

אם A לא הפיכה (אז לפי שיקולים קודמים יש ע"ע $=0$) ונניח $rank A = k$
$dim(\mathbb{F}^n) = n$

ואנו יודעים ש- $dim(\mathbb{F}^n) = dim(Im(A)) + dim(ker A)$

$$\underset{n}{\parallel} \qquad \underset{k}{\parallel} \qquad \underset{dim(ker(A-0\cdot I))}{\parallel}$$

(הסדר מאוחורה)

ר"ג של ע"ע 0.

$\Leftarrow$ ר"ג של ע"ע $0 = n-k$

~~ונניח ש m זה המינימלי שעבורו~~

הערה: אם A נילפוטנטית (קיים m טבעי כך ש- $A^m = 0$). המס' הקטן ביותר s שעבורו $A^s=0$ נקרא "אינדקס הנילפוטנטיות" של A. נניח שאינדקס הנילפוטנטיות של A זה s.
אז הפ"מ שלה הוא $m_A(x)=x^s$ (מעלת הפולינום המינימלי היא אינדקס הנילפוטנטיות של המטריצה).
כ"א יש לה רק ע"ע $=0$ ולכן בפרט מתקיימת ההערה הקודמת (למטריצה נילפוטנטית יש ע"ע יחיד-0)
ונקבל:
ר"ג של ע"ע $0 = n - k$
$k = rank A$

אם A נילפוטנטית, הפ"א (מסדר חאת) שלה הוא - $P_A(x)=x^n$. ($n=$ סדר המטריצה A).

~~נעבור לצורות ז'ורדן: (כבר התחלנו לדבר על זה שיעור שעבר. נזכיר בכל זאת. אבל לפני זה הערה)~~

~~**הערה:** לבלוק ז'ורדן $k\times k$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ הפ"מ = הפ"א (תוכיחו בש.ב)~~

~~וניתן לראות שהפ"א הוא $(x-\lambda)^k$~~

~~ולכן לבלוק ז'ורדן $k\times k$ הפ"מ = הפ"א $= (x-\lambda)^k$~~

צורת ז'ורדן

בלוק ז'ורדן $k\times k$ הוא מהצורה $\begin{pmatrix}\lambda&1&&0\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&\lambda\end{pmatrix}$ ומתקיים $(x-\lambda)^k$ = פ"א = פ"מ

לדוגמא: $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ פ"א = פ"מ = $(x-2)^2$

תמיד יש לבלוק ז'ורדן וקטור עצמי יחיד והוא $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

(לדוגמא עבור המטר' הנ"ל יש ו"ע $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$)

זה קורה כי ו"ע מקיים $(A-\lambda I)v=0$ ואז

$$\begin{pmatrix}0&1&&0\\\vdots&&\ddots&1\\0&\cdots&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&&0&0\\\vdots&&\ddots&1&\vdots\\0&\cdots&&0&0\end{array}\right)\Rightarrow v=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

מטריצה בצורת ז'ורדן זוהי מטריצה שבנויה מבלוק ז'ורדן

$$\begin{pmatrix}\text{בלוק ז'ורדן}&&&0\\&\text{בלוק ז'ורדן}&&\\&&\text{בלוק}&\\0&&&\text{בלוק}\end{pmatrix}$$

(*) כל מטריצה A שהפ"א שלה מתפרק לגורמים לינאריים דומה למטריצה בצורת ז'ורדן, בצורה הבאה:

נניח $A\in M_n(F)$ עם פ"א שמתפרק לגורמים לינאריים. אזי המטריצה בצורת ז'ורדן הדומה לה מקיימת: א. סכום סדרי הבלוקים המתאימים לע"ע λ הוא הריבוי האלגברי של λ בפ"א

ב. מס' הבלוקים של ע"ע λ זה הריבוי הגיאומטרי שלו

ג. גודל הבלוק הגדול של ע"ע λ הוא הריבוי של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי

לסיכום: עבור ע"ע λ:

1. הריבוי האלגברי של λ בפ"א ← סכום סדרי הבלוקים
2. הריבוי האלגברי של λ בפ"מ ← גודל הבלוק הגדול ביותר
3. הריבוי הגיאומטרי של λ ← מס' הבלוקים.

דוג: (1)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מוצאים פ"א, פ"מ, ר"א ור"ג של כל הערכים העצמיים.

לאחר חישוב:

פ"א: $(x+2)(x-1)^3$

פ"מ: $(x+2)(x-1)^2$ (ולכן הבלוק הכי גדול של $\lambda=1$ הוא באודל 2 ושל $\lambda=-2$ באודל 1)

עבור $\lambda=1$: ר"א $=3$ (ולכן סכום סידרי הבלוקים $=3$)

ר"ג $=2$ (ולכן יש 2 בלוקים)

סה"כ 3×3 $\Rightarrow$ בלוק 2×2, בלוק 1×1

עבור $\lambda=-2$: ר"א $=1$ (ולכן סכום סידרי הבלוקים $=1$)

ר"ג $=1$ (ולכן יש בלוק אחד)

ולכן צורת ז'ורדן המתאימה היא

$$\begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{סדר הבלוקים לא משנה}}$

---

(2) נתון פ"א: $(x+3)^2(x-4)^7$, פ"מ: $(x+3)^2(x-4)^2$

מהן הצורות האפשריות לצורת הז'ורדן?

תוספת שלי

פתרון: מהפ"מ נסיק שהבלוק הכי גדול של $\lambda=-3$ הוא בגודל 2 ושל $\lambda=4$ הוא בגודל 2.

מהפ"א נסיק שסכום סידרי הבלוקים של $\lambda=-3$ הוא 2 ושל $\lambda=4$ הוא 7.

עבור $\lambda=-3$ ניתן להסיק שיש רק בלוק אחד בגודל 2, אבל עבור $\lambda=4$ אני לא יודעת את מס הבלוקים כי זה הריבוי הגיאומטרי של $\lambda=4$, וזה לא נתון בשאלה, לכן יש כמה צורות אפשריות.

ולכן הצורות האפשריות הן:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & & & & & & & \\ 0 & -3 & & & & & & & 0 \\ & & 4 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 4 & & & & & \\ & & & & 4 & & & & \\ & & & & & 4 & & & \\ & & & & & & 4 & & \\ 0 & & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

או ←

$2+1+1+1+1+1=7$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & & & & & & & \\ 0 & -3 & & & & & & & \\ & & 4 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 4 & & & & & \\ & & & & 4 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 4 & & & \\ & & & & & & 4 & & \\ & & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & & 4 \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & & & & & & & \\ 0 & -3 & & & & & & & \\ & & 4 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 4 & & & & & \\ & & & & 4 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 4 & & & \\ & & & & & & 4 & 1 & \\ & & & & & & 0 & 4 & \\ & & & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

$2+2+1+1+1=7$ $\qquad$ $2+2+2+1=7$

~~(להסביר על הלוך פרק ומציאת שרשים הנחוש")~~

(3) $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ נילפוטנטית. ונתון כי $A^3 \neq 0$

$\text{rank}\, A = 5$

מצא את כל צורות ז'ורדן האפשריות.

<u>פיתרון:</u>

A נילפוטנט $\Leftarrow$ רק ע"ע 0 ולכן $P_A(x) = x^8$ אז (סכום סדרי הבלוקים הוא 8)

$\alpha \le 8$, $m_A(x) = x^\alpha$ אז

$\circledast$ נתון $A^3 \neq 0$ ולכן $m_A(x) \neq x^3$

$m_A(x) = x^\alpha$ עבור $4 \le \alpha \le 8$

α לא יכול להיות 2, כי אז:
$m_A(x) = x^2$
$\Downarrow$
$A^2 = 0$
ואז: $A^3 = A^2 \cdot A = 0 \cdot A = 0$
ונתון ש: $A^3 \neq 0$
סתירה.

$\circledast$ נתון $\text{rank}\, A = 5 \Leftarrow$ ר"ג של 0 הוא $n - \text{rank}(A) = 8-5=3$

ולכן יש לנו <u>3 בלוקים של 0</u> ולכן הצורות האפשריות:

אם $\alpha = 4$:
את הבלוק הגדול ביותר בגודל 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$4+3+1=8$ $\qquad$ $4+2+2=8$

הערה: סימון מקובל זה לדוג' עבור הע"ע בעמ' הקודם

$$\left(\left(\begin{array}{cccc|cc|cc} 0&1&&&&&& \\ &0&1&&&&& \\ &&0&1&&&& \\ &&&0&&&& \\ \hline &&&&0&1&& \\ &&&&&0&& \\ \hline &&&&&&0&1 \\ &&&&&&&0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} J_4(0) && \\ & J_2(0) & \\ && J_2(0) \end{pmatrix} = J_4(0)\oplus J_2(0)\oplus J_2(0)\right)$$

אם $\alpha=5$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc|c} 0&1&&&&&& \\ &0&1&&&&& \\ &&0&1&&&& \\ &&&0&1&&& \\ &&&&0&&& \\ \hline &&&&&0&1& \\ &&&&&&0& \\ \hline &&&&&&&0 \end{array}\right) = J_5(0)\oplus J_2(0)\oplus J_1(0)$$

אם $\alpha=6$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c} 0&1&&&&&& \\ &0&1&&&&& \\ &&0&1&&&& \\ &&&0&1&&& \\ &&&&0&1&& \\ &&&&&0&& \\ \hline &&&&&&0& \\ \hline &&&&&&&0 \end{array}\right) = J_6(0)\oplus J_1(0)\oplus J_1(0)$$

לא יתכן $\alpha=7,8$ כי אז לא יהיו 3 בלוקים ויהיה $\operatorname{rank} A\neq 5$.

מצוין 10

מטריצה המייצגת ה"ל

אמרנו בשיעורים קודמים ש: $Im(A) = \underbrace{C(A)}_{\text{מרחב העמודה של } A}$

לכן: $\dim(Im(A)) = \dim C(A)$

אבל אנו יודעים ש: $\dim C(A) = \dim \underbrace{R(A)}_{\text{מרחב השורה של } A} = rank(A)$

$$\Downarrow$$

$$\dim Im(A) = rank(A)$$

$$\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(A - 0I))$$

אבל: $\ker(A-0I) = \{v \in V \mid (A-0I)v = \vec{0}\}$

$$\Downarrow$$

זוהי למעשה הגדרת ו"ע של ע"ע 0

לכן: $\dim(\ker(A-0I)) =$ מימד מרחב הפתרונות של $(A-0I)v=\vec{0}$ $\underset{\text{לפי הגדרת ר"ג}}{=}$ הריבוי הגיאומטרי של ע"ע 0