

אלגברה לינארית למורים - מבחן דוגמה

ד"ר מיטל (אליהו) רובינסון.

מתרגל: ניקול בלשוב

זמן הבחינה : 3 שעות תכננו את הזמן כהלכה!!

מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד.
ניתן לצבור בבחינה 110 נקודות אולם הציון הסופי לא יעלה על 100.

בסוף הבחינה יש דפים נוספים לשימושכם.

הערה: כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
הוכחות: שאלות 1-2	
3	
4	
5	
6	
סה"כ	

חלק א' – הוכחות

ענו על אחת מהשאלות הבאות :

1. הוכיחו : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכה משמאל/מימין אזי A הפיכה.

2. הוכיחו את שני המשפטים :

א. משפטון ההחלפה של שטייניץ.

ב. בת"ל מקסימלית היא בסיס , פורשת מינימלית היא בסיס.

חלק ב' - שאלות3. אין קשר בין הסעיפים:

א. מצאו את כל המס' המרוכבים z המקיימים $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1$ (8).

ב. מצאו לאילו ערכים של k למערכת

$$\text{יש: } \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ (k^2 - 5)x + y = k + 2 \end{cases}$$

- i. פתרון יחיד
- ii. א"ס פתרונות.
- iii. אין פתרון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{4. נתונה המטריצה:}$$

- א. מצאו בסיס ומימד לתתי המרחבים : $N(A), C(A)$. (10)
 ב. השלימו את הבסיס שמצאתם ל $R(A)$ לבסיס ל R^4 (5)
 ג. הסבירו לפי א': האם A הפיכה? (7)
 ד. מצאו מיהו המרחב הניצב ל : $(N(A) \cap C(A))$. (8)

5. אין קשר בין הסעיפים :

- א. לאלו ערכי X המטריצה הבאה הפיכה : $\begin{pmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -1 & x+2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- ב. תהי $A \in F^{n \times n}$ מטריצה הפיכה. אזי $A+B$ הפיכה אם ורק אם המטריצה :
 $I + A^{-1}B$ גם הפיכה (10)

אין קשר בין הסעיפים!

.6

- א. תהי A מטריצה אורתוגונאלית הוכיחו כי מתקיים לכל $v \in V$: $\|Av\| = \|v\|$
- ב. האם קיימת מטריצה A ריבועית כך ש $R(A) = N(A)$? אם כן, תנו דוגמה למטריצה כזו. אם לא, הסבירו מדוע לא קיימת מטריצה כזו.
- ג. עבור A ריבועית: תנו דוגמאות מתי:
- אוסף הפתרונות של מע' $Ax = 0, A^t x = 0$ זהים.
 - אוסף הפתרונות של מע' $Ax = 0, A^t x = 0$ שונים לחלוטין.

לתרגול נוסף

- תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל \mathbb{R} (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף
- ש $\mathbb{R}_5[x] = \text{Sp}(A)$. מי מהטענות הבאות נכון. נמק.
- ייתכן ש A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.
 - ייתכן ש A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.
 - שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
 - A בלתי תלויה ליניארית.

- נתון מרחב וקטורי V מעל \mathbb{R} ועבורו בסיס $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. נתונה קבוצת הווקטורים
- $$S = \{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 + v_1\}$$
- מי מהטענות הבאות נכון?
- S בסיס של V .
 - S אינה בסיס של V .
 - לא כל איבר של S הוא צירוף לינארי של איברי B .
 - $\dim(\text{sp}S) = 1$.

א. יהיו A, B מטריצות ריבועית מסדר $n \times n$ כך ש- $AB=0$ הראה ש

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$$

(12) יהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים של מרחב-וקטורי V , וכן $A, B \subseteq V$ תת-קבוצות של V . הוכח/י או הפוך/י:

- א. אם $A \cap B = \emptyset$, $spA \cap spB \neq \{0\}$ או $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית.
 ב. אם $A \cap B = \emptyset$, $spA \cap spB = \{0\}$ או $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית.
 ג. אם $A \subseteq B$ אז $spA \subseteq spB$.

(13) יהיו $A, B \subseteq R^p$ תת-קבוצות סופיות של R^p כך ש- $sp(A) \cup sp(B) = R^p$, הראה ש-
 $sp(A) = R^p$ או $sp(B) = R^p$.

(14) הוכח ש

$$Sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

(15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהיינה A, B קבוצות שונות זרות ולא ריקות של וקטורים מ- V . מי מבין הטענות הבאות נכון, נמק.

- א. אם $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.
 ב. אם A, B בלתי תלויות לינארית אז בהכרח $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית.
 ג. אם $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$ אז בהכרח $A \cup B$ תלויה לינארית.