תרגיל בית 10 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי . יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing$.

פתרון

א. יהי X מ"ט קומפקטי ודיסקרטי אזי $\{\{x\} : x\in X\}$ כיסוי פתוח של X (מדוע?) ובשל הקומפקטיות קיים לו תת כיסוי סופי. מכאן נקבל ש X סופי.

בכיוון ההפוך הטענה נכונה גם ללא הנחת הדיסקרטיות. יהי (X,τ) סופי אזי $|\tau| \leq |P(X)| = 2^{|X|} < \infty$ ומכאן קל להסיק כי לכל כיסוי פתוח קיים תת כיסוי סופי שכן מספר הקבוצות הפתוחות (איברי τ) הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי . יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. נוכיח ש $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing$. נניח בשלילה כי $\bigcap_{i\in I} K_i = \varnothing$. עפ"י דה-מורגן נקבל כי:

$\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} K_i^{\,c} = \varnothing^c = X$. מכיון שבנוסף $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף סגורות הרי ש- $\{K_i^{\,c}\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X. X קומפקטי ולכן קיימים $i_1,....,i_n$ כך ש $\bigcup_{m=1}^{n}\left(K_{i_m}\right)^c = X$. נשתמש שוב בכלל דה מורגן ונקבל $\bigcap_{m=1}^{n} K_{i_m} = \varnothing$ ומצאנו חיתוך סופי ריק של קבוצות מהאוסף $\{K_i\}_{i\in I}$. סתירה.

מש"ל

שאלה 2

א. יהי $\left(X,\tau\right)$ מרחב טופולוגי. יהיו $A_1,...,A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X.

הוכיחו ש- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הוא קומפקטי.

ב. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תתי מרחבים קומפקטיים.

ג. יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות קומפקטיות.

הוכיחו כי $\bigcap_{i\in I} F_i$ קומפקטי.

פתרון

א. יהיו $A_1,...,A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X. נראה כי $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הינו קומפקטי. יהי $\left\{U_j\right\}_{j\in J}$ כיסוי פתוח ל- A ב- X, כלומר: $A\subseteq\bigcup_{j\in J} U_j$. לכל $1\le i\le n$ $A_i\subseteq A\subseteq\bigcup_{j\in J} U_j$ קומפקטית ולכן קיימת קבוצה סופית $F_i\subseteq J$ כך ש $A_i\subseteq\bigcup_{j\in F_i} U_j$. תהי $F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. אזי, F תת קבוצה סופית של J כאיחוד של מספר סופי של קבוצות סופיות ומתקיים $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i\subseteq\bigcup_{j\in F} U_j$. מצאנו תת כיסוי סופי ומכאן $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ קומפקטי.

ב. ניקח X אינסופי עם טופולוגיה דיסקרטית. הוא לא קומפקטי אבל ניתן להשיג אותו כאיחוד הנקודונים שכל אחד מהם כן קומפקטי.

ג. F_i קומפקטית לכל $i\in I$. X האוסדורף ולכן F_i סגורה ב X לכל $i\in I$. לכן $A=\bigcap_{i\in I} F_i$ סגורה ב X. יהי $i_0\in I$ מתקיים $A\subseteq F_{i_0}$, לכן $A=\bigcap_{i\in I} F_i$ סגורה גם ב F_{i_0}. מכיון ש F_{i_0} קומפקטי ו A ת"מ סגור שלו נקבל ש $A=\bigcap_{i\in I} F_i$ ת"מ קומפקטי.

מש"ל

שאלה 3

תהי $f:X\to Y$ חח"ע ועל.

א. הוכיחו שאם f פתוחה או סגורה ואם X הוא האוסדורף אזי Y הוא האוסדורף.
ב. הוכיחו שאם f רציפה ו- Y האוסדורף, אזי X האוסדורף.

פתרון

א. נוכיח קודם טענת עזר:

טענה: תהי $f:X\to Y$ חח"ע ועל אזי f פתוחה אם ורק אם f סגורה.

הוכחת טענת עזר: $f:X\to Y$ חח"ע ועל ולכן לפי שאלה 6 בתרגיל 3 (הסתכלו בפתרון) לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f(A^C)=\left(f(A)\right)^C$. כעת נניח ש f פתוחה ונראה ש f סגורה. תהי $A\subseteq X$ סגורה אזי A^C פתוחה ב X ומכיון ש f פתוחה נקבל ש $f(A^C)$ פתוחה. אבל $f(A^C)=\left(f(A)\right)^C$ ומכאן $\left(f(A)\right)^C$ פתוחה ולכן $f(A)$ סגורה. קיבלנו ש f סגורה. באופן דומה מוכיחים שאם f סגורה אז f פתוחה (תחת ההנחה ש f חח"ע ועל).

מש"ל

נחזור להוכחת התרגיל. מטענת העזר אפשר להניח ש f פתוחה. כדי להוכיח ש- Y האוסדורף ניקח $y_1\neq y_2\in Y$. $f:X\to Y$ על ולכן קיימות $x_1\neq x_2\in X$ כך ש $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$. X האוסדורף ולכן קיימות U סביבה של x_1, V סביבה של x_2 כך ש $U\cap V=\varnothing$. בשל העובדה ש f פתוחה נקבל ש- $f(U),f(V)$ סביבות של y_1,y_2 בהתאמה. לבסוף $f(U),f(V)$ זרות. אמנם נניח בשלילה ש$f(U)\cap f(V)\neq\varnothing$ אזי קיימת $z\in f(U)\cap f(V)\neq\varnothing$. לכן, קיימות $x\in U, y\in V$ כך ש $f(x)=f(y)=z$. אבל f חח"ע מכאן $x=y\in U\cap V$. בסתירה לכך ש $U\cap V=\varnothing$. מצאנו את ההפרדה הדרושה ומכאן Y האוסדורף.

ב. יהיו $x_1\neq x_2\in X$. f חח"ע ומכאן $f(x_1)\neq f(x_2)\in Y$. Y האוסדורף ולכן קיימות U,V סביבות זרות של $f(x_1),f(x_2)$ בהתאמה. f רציפה ולכן $f^{-1}(U),f^{-1}\left(V\right)$ סביבות של x_1,x_2 והן זרות שכן $f^{-1}(U)\cap f^{-1}\left(V\right)=f^{-1}(U\cap V)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$.

שימו לב:סעיף ב' נכון גם אם f אינה על (לא נעזרנו בנתון זה כלל בהוכחה).

מש"ל

שאלה 4

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף של תתי מרחבים קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$. הוכיחו ש- $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \varnothing$. תנו דוגמה נגדית למקרה שתתי המרחבים אינם קומפקטיים.

פתרון

נניח בשלילה ש- $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \varnothing$. מתקיים $E_1 \subseteq X = X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(X \setminus E_i \right)$. נתון ש- E_i תתי מרחב קומפקטיים, ולכן אלה תת קבוצות סגורות. מכאן $\{X \setminus E_i\}_{i=1}^{\infty}$ הוא כיסוי פתוח של E_1. מכיוון ש- E_1 קומפקטי, קיים תת כיסוי סופי:
$E_1 \subseteq X \setminus E_{i_1} \cup X \setminus E_{i_2} \cup \dots \cup X \setminus E_{i_k}$, כאשר בה"כ $E_{i_1} \supseteq E_{i_2} \supseteq \dots \supseteq E_{i_k}$. לכן, $X \setminus E_{i_1} \subseteq \dots \subseteq X \setminus E_{i_k}$ ומכאן $E_1 \subseteq X \setminus E_{i_k}$ וזו סתירה לכך ש- $E_1 \supseteq E_{i_k} \neq \varnothing$.

דוגמה נגדית: למשל $E_i = \left(0, \frac{1}{i}\right)$; או, למשל, $E_i = [i, \infty)$.

מש"ל

שאלה 5

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש- (X,τ) אינו האוסדורף.
ב. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיימים ב- X מספר לא בן מניה של תתי מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תתי מרחבים לא קומפקטיים.
ג. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, כך שכל תת מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש- (X,τ) קומפקטי.

פתרון

א. נניח בשלילה ש- (X,τ) הוא האוסדורף. כל תת מרחב הוא קומפקטי ולכן סגור. לכן τ היא הטופולוגיה הדיסקרטית. ראינו שמ"ט דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי. שימו לב ש- X הוא קומפקטי ודיסקרטי ולכן סופי, בסתירה לנתון.

ב. תתי מרחבים קומפקטיים: כל הנקודונים. ברור שיש מספר לא בן מניה נקודונים.

תתי מרחבים לא קומפקטיים: כל המרחבים מהצורה $X \setminus \{x\}$. ברור שיש מספר לא בן מניה של מרחבים כאלה. נראה מדוע הם לא קומפקטיים. נניח בשלילה ש- $X \setminus \{x\}$ קומפקטי. מכיוון שגם $\{x\}$ קומפקטי, נקבל ש- $X = \left(X \setminus \{x\}\right) \cup \{x\}$ קומפקטי (תרגיל 2א' בקובץ הנוכחי), בסתירה לנתון.

ג. יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X ונמצא תת כיסוי סופי. נבחר את אחת הקבוצות הלא ריקות מהכיסוי U_{i_0} [אם כולן ריקות, אז גם X ריקה ולכן הטענה ברורה]. אם $U_{i_0} = X$ סיימנו. אחרת המשלים $X \setminus U_{i_0}$ הוא סגור ולא טריויאלי ולכן קומפקטי. $\{U_i\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של $X \setminus U_{i_0}$ ב- X ולכן קיים לו תת כיסוי סופי: $\left\{U_{i_j}\right\}_{j=1}^{n}$. נקבל ש- $X = U_{i_o} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\right)$.

מש"ל