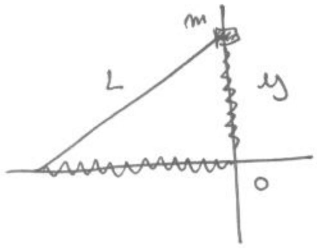
(I)

פתרון תרגיל 10 -

(1) א. האנרגיה הפוטנציאלית של המערכת היא סכום
האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכבידה ושל הקפיצים



$$E_p = mgy \quad \left(E_p\big|_{y=0} = 0 \right)$$

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} k_1 (x - a_1)^2$$

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} k_2 (\cancel{y} - a_2)^2$$

עתה ניתן להגדיר את x על ידי L ו-y : $\quad x = \sqrt{L^2 - y^2}$

ולכן

$$E = mgy + \frac{1}{2} k_1 \left(\sqrt{L^2 - y^2} - a_1 \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y - a_2)^2$$

ב. כדי למצוא נקודת שיווי משקל ניתן לחקור את E :

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \rightarrow y_0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dy} = mg + k_1 \left(\sqrt{L^2 - y^2} - a_1 \right) \left(\frac{1}{\cancel{2}} \right) \left(L^2 - y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (-\cancel{2}y) + k_2 (y - a_2) \\ \dfrac{\partial E}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$mg - k_1 \left(\sqrt{L^2 - y^2} - a_1 \right) \frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}} + k_2 (y - a_2) = 0$$

מתוך הנתון כי $a_1 = 0$

$$mg - k_1 y + k_2 y - k_2 a_2 = 0$$

$$(k_2 - k_1) y = k_2 a_2 - mg$$

$$\boxed{y_0 = \frac{k_2 a_2 - mg}{k_2 - k_1}}$$

נסתכל על הנגזרת השניה (כאשר $a_1 = 0$) :

$$\frac{dE}{\partial y} = mg - k_1 y + k_2 y - k_2 a_2$$

$$\frac{d^2 E}{dy^2} = k_2 - k_1 \underset{\text{(מתוך נתונים)}}{>} 0 \rightarrow$$

(II)

ב. נוכל להגדיר את האנרגיה הכללית של המערכת כ:

$$\underset{\text{כללי}}{E} = \underset{\text{פוטנציאלי}}{E} + E_K = \text{Const}$$

נגזרה לפי זמן תתן משוואת תנועה:

$$\underset{\text{פוטנציאלי}}{\dot{E}} + \dot{E}_k = 0$$

$$E = mgy + \frac{1}{2}k_1(L^2-y^2) + \frac{1}{2}k_2(y-a_2)^2$$

$$\dot{E} = mg\dot{y} + \frac{1}{2}k_1(-2y\dot{y}) + k_2(y-a_2)\dot{y} = mg\dot{y} - k_1 y\dot{y} + k_2(y-a_2)\dot{y}$$

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m v_y^2 = \frac{1}{2}m(\dot{y})^2$$

$$\dot{E}_K = m\dot{y}\ddot{y}$$

$$mg\dot{y} - k_1 y\dot{y} + k_2(y-a_2)\dot{y} + m\dot{y}\ddot{y} = 0$$

$$\dot{y}\left(mg - k_1 y + k_2 y - k_2 a_2 + m\ddot{y}\right) = 0$$

$$m\ddot{y} + (k_2-k_1)y = k_2 a_2 - mg$$

קיבלנו משוואת תנועה של אוסצילטור, ולכן:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k_2-k_1}{m}}$$

מאחר והאיבר הנוסף מוסיף לנו קבוע לפתרון.

3. האנרגיה הפוטנציאלית היא:

$$E = mgy + \frac{1}{2}k_1\left(\sqrt{L^2-y^2}-a_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2(y-a_2)^2$$

בהצבה של התנאים הנתונים נשאר עם

$$E = \frac{1}{2}k_1\left(\sqrt{L^2-y^2}-a_1\right)^2 = \frac{1}{2}k_1\left(L^2-y^2-2a_1\sqrt{L^2-y^2}+a_1^2\right)$$

נפתח את השורש

$$E \simeq \frac{1}{2}k_1\left(L^2-y^2-2a_1\left(L-\frac{1}{2}\frac{y^2}{L}\right)+a_1^2\right) = \frac{1}{2}k_1\left(L^2-y^2-2a_1L+\frac{a_1}{L}y^2+a_1^2\right)$$

נחפש מצב שיווי משקל:

$$\frac{dE}{dy} = \frac{1}{2}k_1\left(-2y+\frac{a_1}{L}2y\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$2y\left(\frac{a_1}{L}-1\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$y_0 = 0$$

(III)

נסתכל שוב על האנרגיה:

$$E_{\text{כללי}} = E_{\text{פוטנציאלי}} + E_k$$

$$E = \frac{1}{2}k_1\left(L^2+a_1^2-y^2\left(1-\frac{a_1}{L}\right)-2a_1L\right)+\frac{1}{2}m(\dot{y})^2 = \text{const}$$

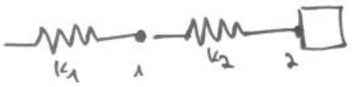
$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}k_1\left(-2y\dot{y}\left(1-\frac{a_1}{L}\right)\right)+m\dot{y}\ddot{y} = 0$$

$$\dot{y}\left(k_1 y\left(\frac{a_1}{L}-1\right)+m\ddot{y}\right) = 0$$

$$\ddot{y}+\frac{k_1}{m}\left(\frac{a_1}{L}-1\right)y = 0$$

ומכאן נראה כי משוואת התנועה שלנו הן כשל אוסצילטור עם $\omega^2 = \frac{k_1}{m}\left(\frac{a_1}{L}-1\right)$

(2) א' חיבור בטור



בנקודה 1:

$$-k_1\Delta x_1 = -k_2\Delta x_2$$

בנקודה 2:

$$F = -k_2\Delta x_2$$

עכשיו אנו מעוניינים בביטוי:

$$F = -k_{eff}\Delta x$$

$$\Delta x = \Delta x_1+\Delta x_2$$

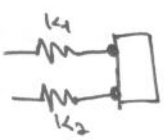
$$-k_2\Delta x_2 = -k_{eff}(\Delta x_1+\Delta x_2)$$

$$\Delta x_1 = \frac{k_2}{k_1}\Delta x_2$$

$$k_2\cancel{\Delta x_2} = k_{eff}\left(\frac{k_2}{k_1}\Delta x_2+\Delta x_2\right) = k_{eff}\left(\frac{k_2}{k_1}+1\right)\cancel{\Delta x_2}$$

$$\boxed{k_{eff} = \frac{k_2}{1+\frac{k_2}{k_1}} = \frac{k_2k_1}{k_1+k_2}}$$

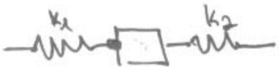
ב. חיבור במקביל:



$$F = -k_1\Delta x-k_2\Delta x = -\underbrace{(k_1+k_2)}\Delta x$$

$$\boxed{k_{eff} = k_1+k_2}$$

ג. חיבור משני צדדים:



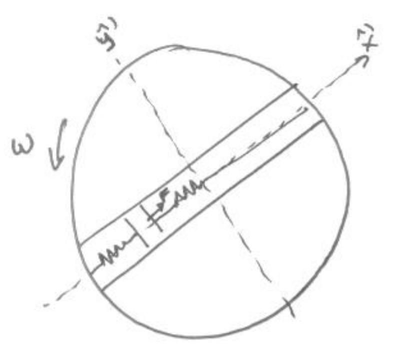
$$F = -k_1\Delta x_1+k_2\Delta x_2 = -(k_1+k_2)|\Delta x|$$

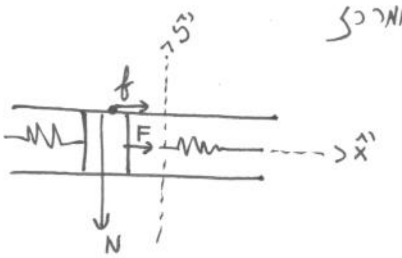
כאשר $\Delta x_2 = -\Delta x_1$

$$\boxed{k_{eff} = k_1+k_2}$$

(IV)

(3) א.





עבור המסה הסוטה ממרכז הכדור מתקיים

לכן ניתן לרשום את הכוחות שלה כ:

$$\Sigma\vec{F} = -kx\hat{x}' - \cancel{f}\hat{x}' - N\hat{y}'$$

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{a} = -\frac{k}{m}x\hat{x}' - \cancel{\frac{f}{m}}\hat{x}' - \frac{N}{m}\hat{y}'$$

$$f = \mu N \rightarrow \vec{a} = -\frac{k}{m}x\hat{x}' - \frac{\mu N}{m}\hat{x}' - \frac{N}{m}\hat{y}'$$

חיכוך

עתה נסתכל על התאוצה כפי שנצפה על הדיסקה המסתובבת:

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

מאחר והתנועה הינה בכוון $\hat{x}$:

$$\vec{r} = x\hat{x}'$$
$$\vec{v}' = \dot{x}\hat{x}'$$
$$\vec{a}' = \ddot{x}\hat{x}'$$
$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$$

נוכל לחשב את האיברים השונים:

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = (\omega\hat{z})\times(x\hat{x}') = \omega x\,\hat{y}'$$
$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = (\omega\hat{z})\times(\omega x\hat{y}') = \omega^2 x(-\hat{x}')$$
$$\vec{\omega}\times\vec{v}' = (\omega\hat{z})\times(\dot{x}\hat{x}') = \omega\dot{x}\,(\hat{y}')$$

והכל ביחד:

$$\ddot{x}\hat{x} = -\frac{k}{m}x\hat{x}' - \mu\frac{N}{m}\hat{x}' - \frac{N}{m}\hat{y}' - 2\omega\dot{x}\hat{y}' + \omega^2 x\hat{x}'$$

ומכאן שתי משוואות תנועה:

$$\hat{x}': \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \mu\frac{N}{m} + \omega^2 x \quad (i)$$

$$\hat{y}': \quad 0 = -\frac{N}{m} - 2\omega\dot{x} \quad (ii)$$

ב: מתוך המשוואות (i) ו-(ii) ניתן לקבל:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x + \mu\frac{N}{m} = 0 \\ &\frac{N}{m} = -2\omega\dot{x} = 2\omega(-\dot{x}) \end{aligned}\right\} \rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x + 2\mu\omega\dot{x} = 0$$

מאחר ועל כוח
החיכוך להיות הפוך בסימן למהירות

(V)

המשוואת שקבלנו הינה של אוסצילטור מרוסן :

$$\ddot{X} + \underbrace{2\mu\omega}_{2\gamma}\dot{X} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)}_{\omega_0^2}X = 0$$

על מנת שיתבצעו תנודות הלנו עלינו להיות במצב של ריסון חלש, ולכן הפתרון שלנו צריך להיראות כך

$$X = e^{-\mu\omega t}\left(D_1\cos(\omega' t) + D_2\sin(\omega' t)\right)$$

כאשר $\omega' = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$

ומכאן התנאי המתמטי: $\omega' > 0$

$$\downarrow$$

$$\frac{k}{m} - \omega^2 - (\mu\omega)^2 > 0$$

$$\boxed{\frac{k}{m} > \omega^2(1+\mu^2)}$$

ג. מקדם החיכוך הקינטי משפיע כאשר יש תנועה כפי שראינו בסעיפים הקודמים אך אם אין תנועה אין שום ענין ולכן מקדם החיכוך הסטטי לא נחוץ לנו. (שום תנועה גם לא תאוצות).

(4) א. כאשר המערכת בשיווי משקל:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= T - kX = 0\\ \Sigma F_y &= T - Mg = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow kX = Mg$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{X_0 = \frac{Mg}{k}} = \frac{2mg}{k}$$

ב. עקב קיימת תנועה בשני הכוונים ולכן

$$\Sigma F_x = T - kX = ma_x = m\ddot{X}$$

$$\Sigma F_y = T - Mg = Ma_y = M\ddot{y}$$

$\leftarrow \left\{ \begin{aligned}\dot{x} &= -\dot{y}\\ \ddot{x} &= -\ddot{y}\end{aligned}\right.$: כאשר

(i) $T = kX + m\ddot{X}$

(ii) $T = Mg + M(-\ddot{X})$

$$(m+M)\ddot{X} = Mg - kX$$

$$\ddot{X} + \frac{k}{m+M}X - \frac{M}{m+M}g = 0$$

מנקודת שווי משקל $Mg = kX_0$

$$\ddot{X} + \frac{k}{m+M}X - \frac{k}{m+M}X_0 = 0$$

(VI)

$$\ddot{X} + \frac{k}{m+M}(X - X_0) = 0$$

אם נגדיר $\Delta = X - X_0$

$\ddot{\Delta} = \ddot{X}$

$$\ddot{\Delta} + \underbrace{\left(\frac{k}{m+M}\right)}_{\omega^2}\Delta = 0$$

נזהה אוסצילטור הרמוני:

זמן מחזור $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}}$

ii.

$$\Delta = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

כאשר נוכל להגדיר כי המהירות בתחילת הזמן אפס, ולכן

$$\dot{\Delta} = -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$$

$$\dot{\Delta}(t=0) = 0 + \omega B = 0 \quad \hookrightarrow B = 0 \longrightarrow \Delta = A\cos(\omega t)$$

$$X = A\cos(\omega t) + X_0$$

עתה ניתן להסתכל על משוואה (i)

$$T = kX + m\ddot{X} = m\left(-\omega^2 A\cos(\omega t)\right) + k\left(A\cos(\omega t) + X_0\right) =$$

$$= (k - m\omega^2)A\cos(\omega t) + kX_0 = \left(k - m\frac{k}{m+M}\right)A\cos(\omega t) + kX_0 =$$

$$= \left(1 - \frac{m}{m+M}\right)kA\cos(\omega t) + kX_0 = \left(\frac{\cancel{m}+M-\cancel{m}}{m+M}\right)kA\cos(\omega t) + kX_0$$

$$T = kX_0 + \frac{Mk}{m+M}A\cos(\omega t)$$

מתנאי שווי המשקל ידוע לנו ש $kX_0 = Mg$

$$\text{(iii)} \quad T = Mg + M\frac{k}{m+M}A\cos(\omega t)$$

הערך המינימלי של T יהיה קשור לערך המינימלי של $\cos(\omega t)$, ולכן:

$$T_{min} = Mg - M\frac{kA}{m+M}$$

כדי שהחוט לא יתרופף

$$T_{min} > 0$$

$$\hookrightarrow M\left(g - \frac{kA}{m+M}\right) > 0$$

$$g > \frac{kA}{m+M} \rightarrow \boxed{A < \frac{g(m+M)}{k} = \frac{3mg}{k}} \quad \text{(iv)}$$

(ב.) השלמה: האנרגיה הקינטית המרבית תהיה כאשר: v_{max} ולכן

$$\dot{X} = -\omega A\sin(\omega t) \rightarrow \max|v| = \omega A$$

$$\boxed{E_{k\,max} = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 + \frac{1}{2}M(\omega A)^2 = \frac{1}{2}(m+M)\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\frac{k}{\cancel{(m+M)}}A^2 = \frac{1}{2}kA^2} \longrightarrow$$

מתקיים לכן שאת כל התנועה אפשר להתייחס באוסצילטור עם אמפליטודה A (כך שהתנועה המירבית הינה ב- $X - X_0 = A$).

(VII)

ב. המתיחות המירבית בחוט תתקבל כאשר $\cos(\omega t)=1$: (ממשוואה iii)

$$T = Mg + M\frac{k}{m+M}A$$

אנו יודעים כי הערך המירבי של A הינו (מ-iv)

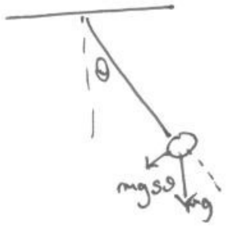
$$A = \frac{g(m+M)}{k}$$

$$T = Mg + \frac{Mk}{\cancel{m+M}}\cdot\frac{g\cancel{(m+M)}}{\cancel{k}} = 2Mg$$

מתנאי שיווי משקל:

$$\boxed{T = 2Mg = 2kx_0}$$

(5)



$$\Sigma F = -mg\,s\theta = ma = m\ddot{x} \qquad x = L\theta$$
$$\ddot{x} = L\ddot{\theta}$$

בזוויות קטנות $\theta \sim s\theta$

$$\cancel{m}L\ddot{\theta} + \cancel{m}g\,s\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

נבחר בפתרון:

$$\theta = A\cos(\omega_0 t)$$

ולכן המתיחות בחוט הינה

$$T - mg\cos(\theta) = ma_r = ml\omega^2$$

$$\omega = \dot{\theta} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t)$$

$$T = mg\cos(\theta) + ml\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t) = mg\cos(\theta) + m\cancel{l}\frac{g}{\cancel{l}}A^2\sin^2(\omega_0 t)$$

$$T = mg\cos(\theta) + mgA^2\sin^2(\omega_0 t) = mg\cos(A\cos(\omega_0 t)) + mgA^2\sin^2(\omega_0 t)$$

ומכיוון ו-A קטן ניתן להשתמש בקירוב $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$$T \cong mg\left(1 - \frac{1}{2}A^2\cos^2(\omega_0 t)\right) + mgA^2\sin^2(\omega_0 t) = mg + mgA^2\left(\sin^2(\omega_0 t) - \frac{1}{2}\cos^2(\omega_0 t)\right)$$

$$\langle T\rangle \simeq mg + mgA^2\left(\langle\sin^2(\omega_0 t)\rangle - \frac{1}{2}\langle\cos^2(\omega_0 t)\rangle\right)$$

והממוצע של הסינוסים והקוסינוסים של מחזור הינו $\frac{1}{2}$ ולכן $\langle T\rangle > mg$

$$\boxed{\langle T\rangle \simeq mg + \frac{1}{4}mgA^2}$$