הגדרה: מרחב טופולוגי X יקרא "קומפקטי מקומית" אם לכל נקודה $x \in X$ קיימת תת קבוצה קומפקטית K כך ש$x \in int(K)$, כלומר $x \in O \subseteq K$ כאשר O פתוחה. (שקול: לכל נקודה קיימת סביבה קומפקטית)

אם המרחב קומפקטי הוא גם קומפקטי מקומית כי אז נקח $K = X$ והפנים של X הוא בעצמו.

$\mathbb{R}$ לא קומפקטי, אבל כן קומפקטי מקומית, כי לכל נקודה x אפשר לקחת $[x-1, x+1]$ זה קטע סגור ולכן קומפקטי, וx היא נקודה פנימית בקטע.

דוגמא נגדית: נוכיח ש$\mathbb{Q}$ אינו קומפקטי מקומית.

נניח שכן. יהי $x \in \mathbb{Q}$, אז יש איזשהי קבוצה קומפקטית K ב$\mathbb{Q}$ כך ש$x \in (r, s) \cap \mathbb{Q} \subseteq K$.

כזכור: תת קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית היא קומפקטית.

בתוך הקטע הפתוח (r, s) בהכרח אפשר למצוא קטע עם קצוות אי-רציונליים, a, b.

$(a, b) \cap \mathbb{Q} = [a, b] \cap \mathbb{Q}$.

$[a, b] \cap \mathbb{Q} = (a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq (r, s) \cap \mathbb{Q} \subseteq K$.

כלומר, זאת תת קבוצה סגורה של K (כי היא שווה לקבוצה סגורה מ$\mathbb{R}$ שחותכים אותה עם $\mathbb{Q}$
).

לכן היא קומפקטית.

זה לא יכול להיות קומפקטי, למשל כי זה לא שלם (a, b אי רציונליים אז אפשר למצוא בתוך הקטע סדרה רציונלית שתשאף להם)

סתירה.

וכזכור מההרצאה, במרחב מטרי קומפקטיות גוררת שלמות.

קומפקטיפיקציית הנקודה

המטרה: לקחת מרחב שהוא לא קומפקטי, להוסיף לו נקודה אחת בלבד וככה להפוך אותו להיות קומפקטי.

הגדרה: יהי (X, τ) מרחב האוסדורף שאינו קומפקטי. נגדיר מרחב חדש $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. והטופולוגיה עליו היא כדלהלן:

$\hat{\tau}$, הקבוצות הפתוחות הן:

כל הקבוצות שפתוחות בX.

בנוסף, כל הקבוצות שמכילות את ∞ והמשלים שלהן קומפקטי בX.

טענה 1: הטופולוגיה שהגדרנו אכן מהווה טופולוגיה.

הוכחה 1:

א. $\emptyset$ פתוחה כי היא פתוחה בX. $\hat{X}$ פתוח כי הוא מכיל את ∞ והמשלים שלו זה $\emptyset$ שהיא קומפקטית.

ב. איחוד כלשהו:

איחוד של קבוצות רק מההגדרה הראשונה, כלומר פתוחות בX הוא פתוח בX ולכן מקיים את ההגדרה הראשונה ופתוח ב$\hat{X}$.

איחוד של קבוצות מהסוג השני: A_i, זה אומר ש$\infty \in A_i$, ולכל i A_i^c קומפקטי בX. אזי $\infty \in \bigcup A_i$, ו

$$\left(\bigcup A_i\right)^c = \bigcap A_i^c$$

חיתוך כלשהו של קבוצות קומפקטיות במרחב האוסדורף (בX) הוא קומפקטי- הוכחנו בתרגול הקודם.

לכן האיחוד הוא גם מהסוג השני.

אם יש קבוצות משני הסוגים, נאחד כל סוג בנפרד, וכמו שראינו, נקבל קבוצה מהסוג הראשון וקבוצה מהסוג השני. אז עכשיו יש לנו איחוד של A פתוחה בX וB מכילה את ∞ והמשלים שלה קומפקטי בX.

$A \cup B \in \infty$. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. B^c קומפקטית (ולכן סגורה, כי אנחנו בתוך מרחב האוסדורף), וA^c סגורה (כי A פתוחה בX) אז החיתוך הוא תת קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית, ולכן קומפקטי.

ג. חיתוכים סופיים:

חיתוך של קבוצות מהסוג הראשון הוא מהסוג הראשון.

אם $A_1, ..., A_n$ קבוצות פתוחות מהסוג השני, אז כל אחת מהן מכילה את ∞ ולכן גם החיתוך. ובנוסף, לכל אחת מהן משלים קומפקטי,

$$(A_1 \cap ... \cap A_n)^c = A_1^c \cup ... \cup A_n^c$$

וברור שאיחוד סופי של קבוצות קומפקטיות יהיה קומפקטי (כי לוקחים כיסוי סופי לכל אחת מהן)

אם חלק מהסוג הראשון וחלק מהסוג השני, נחתוך כל סוג בנפרד, ואז נקבל חיתוך של קבוצה מהסוג הראשון עם קבוצה מהסוג השני. נניח שA פתוחה בX וB מכילה את ∞ והמשלים שלה קומפקטי בX.

$A \cap B \subseteq X$.

מכיוון שB^c קומפקטי בX, אז הוא סגור בX(כי X הוא האוסדורף), אז זה אומר ש$X \setminus B^c =$ $X \cap B$ פתוח בX. ולכן $A \cap B = A \cap (B \cap X)$ פתוח בX.

טענה 2: X הוא תת מרחב של $\hat{X}$.

מצד אחד, לפי הגדרה, כל קבוצה פתוחה בX היא חיתוך של X עם עצמה, והיא בעצמה פתוחה ב$\hat{X}$. כלומר, כל קבוצה פתוחה בX היא חיתוך של X עם קבוצה שפתוחה ב$\hat{X}$.

מצד שני, אם A פתוחה ב$\hat{X}$אז או שA מוכלת בX ופתוחה בו, אז כמובן שהחיתוך שלה עם X פתוח בX, או שA מכילה את ∞ ובטענה הקודמת הוכחנו שהחיתוך שלה עם X הוא פתוח בX.

טענה 3: $\hat{X}$ קומפקטי.

יהי $\{O_i\}$ כיסוי פתוח של $\hat{X}$. בהכרח באחת מהקבוצות, נניח O_j יש את ∞. בגלל שהיא פתוחה ומכילה את ∞, אז O_j^c קומפקטי. $\{O_i \cap X\}$ הוא כיסוי פתוח של O_j^c ולכן יש לו תת כיסוי סופי, אז נקח את הקבוצות $O_{i_1}, ..., O_{i_n}$ מהתת כיסוי הסופי, וביחד עם O_j זה יוצר תת כיסוי סופי של כל המרחב.

טענה 4: X צפוף ב$\hat{X}$.

הוכחה 4: הקבוצות היחידות שמכילות את X הן X ו$\hat{X}$. X לא סגורה כי $X^c = \{\infty\}$ אינו פתוח, כי הוא קבוצה שמכילה את ∞ ושהמשלים שלה אינו קומפקטי (כזכור, X לא קומפקטי).

טענה 5: $\hat{X}$ הוא האוסדורף אמ"ם X קומפקטי מקומית.

הוכחה 5:

$\Longrightarrow$ אם $x \neq y \in X$ נקח קבוצות פתוחות בX שמפרידות ביניהן (כזכור, X הוא האוסדורף)

אם $x \neq \infty$, אז יש לx סביבה K קומפקטית, כלומר $x \in O \subseteq K$ כאשר O פתוחה בX. (ולכן O פתוחה גם ב$\hat{X}$). ו$\hat{X} \setminus K$ פתוחה ב$\hat{X}$ מהגדרה. לכן $O, \hat{X} \setminus K$ מהוות את הסביבות המפרידות.

$\Longleftarrow$ יהי $x \in X$. מכיוון ש$\hat{X}$ הוא האוסדורף, אז לx ול∞ יש סביבות מפרידות. כלומר, $x \in O, \infty \in A$, וA^c קומפקטית בX. ו$O \cap A = \emptyset$. כלומר, $O \subseteq A^c$. ומצאנו סביבה קומפקטית לx.

דוגמא: אם X הוא מרחב דיסקרטי אינסופי, אז $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ כאשר הקבוצות הפתוחות הן כל תת קבוצה של X וכל קבוצה שמכילה את ∞ והמשלים שלה סופי.

שימו לב שמרחב דיסקרטי אינסופי הוא קומפקטי מקומית כי כל נקודה x מוכלת ב$\{x\}$ שהוא פתוח וקומפקטי.

אז קומפקטיפיקציית הנקודה היא מרחב קומפקטי והאוסדורף. (למעשה הוא מרחב מאוד מיוחד. מהסוג שנקרא "מרחבים פרוסופיים")

חסימות כליל

הגדרה: מרחב מטרי נקרא חסום כליל אם לכל ϵ יש מספר סופי של נקודות $x_1, ..., x_n \in X$ כך ש $X \subseteq \bigcup B(x_i, \epsilon)$.

תרגיל: הוכיחו שתת קבוצה של קבוצה חסומה כליל היא חסומה כליל.

הוכחה: יהי X מרחב חסום כליל ו$Y \subseteq X$. אנחנו רוצים להוכיח שY חסום כליל יהי $2r > 0$.

מכיוון שX חסום כליל, יש $x_1, ..., x_n \in X$ כך ש $X \subseteq \bigcup B(x_i, r)$. כל כדור שלא נחתך עם Y אפשר לזרוק.

וכל כדור שנחתך עם Y, נבחר $y_i \in Y \cap B(x_i, r)$. נטען ש$Y \subseteq \bigcup B(y_i, 2r)$. ובכן, יהי $y \in Y$. אז $y \in X$, ולכן יש x_i כך ש$y \in B(x_i, r)$. לכן מאי שוויון המשולש $d(y, y_i) < 2r$ כלומר $y \in B(y_i, 2r)$.

תרגיל: יהי X מרחב מטרי וA תת קבוצה חסומה כליל. הוכיחו ש$\bar{A}$ חסום כליל.

פתרון: נניח שאנחנו רוצים לכסות את $\bar{A}$ עם מספר סופי של כדורים ברדיוס $2r$. אז ראשית נכסה את A עם מספר סופי של כדורים ברדיוס r. $A \subseteq \bigcup B(x_i, r)$. נוכיח ש$\bar{A} \subseteq \bigcup B(x_i, 2r)$.

תהי $x \in \bar{A}$. אם $x \in A$ אז יש כדור שהיא שייכת אליו. אחרת, בגלל ש$x \in \bar{A}$ זה אומר שיש סדרה בA ששואפת לx, אז החל ממקום מסויים המרחקים יהיו קטנים מr. כלומר, יש $a \in A$ כך ש$d(a, x) < r$. $a \in A$ לכן יש x_i כך ש$a \in B(x_i, r)$. לכן מאי שוויון המשולש $x \in B(x_i, 2r)$.

טענה: כל קבוצה קומפקטית היא חסומה כליל.

הוכחה: יהי $r > 0$. $X \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, r)$. זה כיסוי פתוח, אז יש לו תת כיסוי סופי. וסיימנו. כלומר, X מוכל באיחוד סופי של כדורים ברדיוס r.

דוגמא למרחב חסום כליל ולא קומפקטי: $(0, 1)$ כידוע אינו קומפקטי, אבל חסום כליל כי הוא תת מרחב של $[0, 1]$ שהוא קומפקטי ולכן חסום כליל.