<u>**הגדרה:**</u> נניח $\alpha,\beta$ כל אחד אוסף תתי קבוצות של קבוצה $X$. אומרים ש – $\boldsymbol{\beta}$ **עידון של** $\boldsymbol{\alpha}$ אם מתקיים – $\forall B\in\beta\ \exists A\in\alpha: B\subseteq A$

נסמן: $\beta\prec\alpha$.

<u>דוגמה טריוויאלית</u>: $\beta\subseteq\alpha$ אז $\beta\prec\alpha$.

<u>דוגמה</u>: $\{B_{r_1}(x):x\in X\}\succ\{B_{r_2}(x):x\in X\}\quad \forall 0<r_1<r_2$

<u>**הגדרה:**</u> נניח $(X,d)$ מ"מ, $\alpha$ כיסוי פתוח של $X$. אומרים ש $\alpha$ הוא $\boldsymbol{\delta}$**-אחיד** אם מתקיים $\{B_\delta(x)|x\in X\}\prec\alpha$

אומרים **כיסוי אחיד** *(uniform covering)* אם הוא $\delta$-אחיד עבור $\delta>0$ מסוים.

<u>**הגדרה**</u>: אומרים שהמספר $\delta>0$ הוא **מספר לבג** $(Lebesgue)$ של כיסוי $\alpha$ אם כל תת קבוצה $B$ ב $X$ בעלת קוטר קטן מ $\delta$ מוכל באחד מהאיברים של $\alpha$.

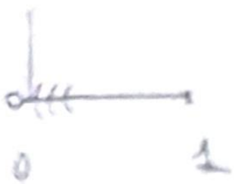
(ז"א $\operatorname{diam} B<\delta\Rightarrow\{B\}\prec\alpha$).

<u>**הערות:**</u>

1) אם $0<\delta$ מספר לבג של $\alpha$, אז כל $\delta_1$ כך ש - $0<\delta_1<\delta$ גם מספר לבג.

2) עבור $\alpha=\{B_\delta(x)|x\in X\}$, מספר לבג $=\delta$.

3) <u>**דוגמה:**</u> כיסוי פתוח ללא מספר Lebesgue.



$X=(0,1]\notin Comp \qquad A_n:=\left(\frac{1}{n},1\right]$

$\alpha:=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$

כיסוי פתוח של $(0,1]$. אבל אין מספר לבג עבור $\alpha$.

אם נניח בשלילה שכן אז קיים $\delta>0$ מספר לבג ל – $\alpha$,

נגדיר – $A:=B_{\frac{2\delta}{5}}(\tfrac{1}{5}\delta)=(0,\tfrac{3}{5}\delta)$

אז $diam(A)=\tfrac{3}{5}\delta<\delta$

אבל $A$ <u>לא מוכל באף איבר של</u> $\alpha$.

**<u>משפט</u>**: (מספר *Lebesgue*)

נניח $(\mathrm{X},d)$ מרחב מטרי קומפקטי. אז לכל כיסוי פתוח $\alpha$ יש מספר לבג.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקים כיסוי פתוח $\alpha$ ללא מספר לבג.

אז לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה $A_n$ כך ש

$diam(A_n)<\frac{1}{n}$ אבל $A_n$ **<u>לא מוכל באף איבר של</u>** $\alpha$.

לכל $n\in\mathbb{N}$ נבחר נקודה אחת $a_n\in A_n$.

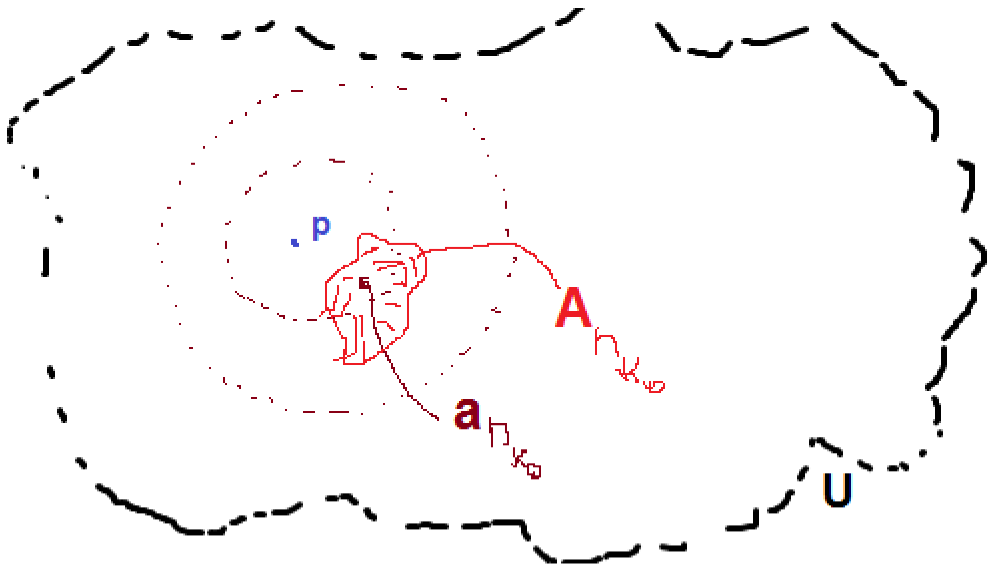
נתון ש $\mathrm{X}$ קומפקטי. הוא מטריזבילי לכן גם $\mathrm{X}\in \mathrm{SComp}$.

לכן קיימת תת סדרה מתכנסת $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ של הסדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. תהי $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=p$.

$\alpha$ כיסוי. קיים $U\in\alpha$ כך ש $p\in U$ (כי $\alpha$ כיסוי)

קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B_\varepsilon(p)\subseteq \mathrm{U}$ (כי $U$ פתוח)

קיים $k_0\in\mathbb{N}$ כך ש $diam(A_{n_{k_0}})<\frac{\varepsilon}{2}$ $d(p,a_{n_{k_0}})<\frac{\varepsilon}{2}$ (התכנסות והבניה)




$d(p,x)\le d(p,a_{n_{k_0}})+d(a_{n_{k_0}},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x\in A_{n_{k_0}}$.

נקבל $A_{n_{k_0}}\subseteq B_\varepsilon(p)$. אז גם $A_{n_{k_0}}\subseteq B_\varepsilon(p)\subseteq U\in\alpha$, סתירה עם הבנייה של $A_{n_{k_0}}$ !

☺

**תוצאה:** אם מרחב מטרי הוא קומפקטי אז כל כיסוי פתוח שלו אחיד.

הסבר: נניח $\alpha$ כיסוי פתוח. קיים מספר לבג $\delta > 0$. אז $\{B_{\frac{\delta}{3}}(x) : x \in X\} \prec \alpha$.

**משפט**: נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. אם $X$ קומפקטי אז $f : X \to Y$ רציפה במידה שווה.

הוכחה: נניח $\varepsilon > 0$. ש"ל שקיים $\delta > 0$ כך שמתקיים :

$$d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) \le 2\varepsilon$$

נגדיר $\alpha := \{f^{-1}(B_\varepsilon(y) : y \in Y\}$. אז $\alpha$ כיסוי פתוח של $X$ (רציפות).

קיים מספר לבג $\delta > 0$ עבור $\alpha$ (קומפקטיות של $X$ ומשפט על מספר לבג).

נניח $d(x_1,x_2) < \delta$. אז $diam\{x_1,x_2\} < \delta$. לכן קיים $y \in Y$ כך ש

$$\{x_1,x_2\} \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(y))$$

אז $\{\mathrm{f}(x_1),\mathrm{f}(x_2)\} \subseteq ff^{-1}(B_\varepsilon(y)) \subseteq B_\varepsilon(y)$.

לכן $\rho(f(x_1), f(x_2)) \le diam(B_\varepsilon(y)) \le 2\varepsilon$.

☺

**תרגיל:** נניח $(X,d)$ מ"מ קומפקטי. הוכיחו שקיימים $x,y \in X$ כך ש –

$$diam(X) = d(x,y)$$

סקיצה: $X \times X \in Comp$ ו $d : X \times X \to [0,\infty)$ רציפה (מדוע ?) ...

**הגדרה**: פונקציה $\mathrm{f} : X \to Y$ נקראת **קומפקטיפיקציה** (compactification) של $X$ אם $\mathrm{f}$ שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y \in Comp \cap T_2$.

<u>דוגמאות:</u>

$\mathrm{i}:(-1,1)\to[-1,1]$ "דו-נקודתית")"

$f:\mathbb{R}^n\to B_1[0]\quad f(v)=\frac{v}{1+\|v\|}$

$\mathrm{f}:\mathbb{N}\to\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\quad \mathrm{f(n)}=\frac{1}{n}$ "חד-נקודתית")"

**<u>תרגיל</u>** * (יהיה בתירגול) -- **קומפקטיפיקציה חד-נקודתית** (Alexandroff)

נניח $(X,\tau)$ קומפקטי מקומית לא קומפקטי והאוסדורפי. תהי $p\notin X$ ("נקודת האינסוף").
בקבוצה $X^*=X\cup\{p\}$ נגדיר $\tau^*:=\tau\cup\{X^*\setminus K:\ K\ is\ compact\}$.

הוכיחו:

1. $(X^*,\tau^*)\in Comp\cap T_2$.
2. פונקצית ההכלה $i:X\to X^*$ מגדירה שיכון טופולוגי צפוף.

<u>דוגמאות:</u>

$X=\mathbb{R}^n$ אז $X^*\simeq S_n$ (הטלה סטראוגרפית)

$X=\mathbb{N}$ אז $X^*\simeq\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$

$X=(-\infty,1)\cup(5,7)$ אז $X^*\simeq 8$

<u>תרגיל:</u> לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי). נניח ל $(\mathbb{R},\tau_{discr})$

**<u>משפט</u>:** $LComp\cap T_2\subset T_{3.5}$

הוכחה: נניח $X\in LComp\cap T_2$. אם $X$ קומפקטי אז הוא $T_4$ כי הוכחנו ש $Comp\cap T_2\subset T_4$. לכן גם $X\in T_{3.5}$. בה"כ $X\notin Comp$.

אז קיימת קומפקטיפיקציה $i:X\to X^*\in Comp\cap T_2$. ברור $X^*\in T_4$

(כי $Comp\cap T_2\subset T_4$). מצד שני $T_4\subset T_{3.5}$ (כי $T_4=T_4^{func}$ לפי משפט Urysohn. לכן $X^*\in T_{3.5}$. כעת נשתמש בעובדה ש $T_{3.5}$ תכונה תורשתית. לכן גם $X\in T_{3.5}$.

☺

**<u>תזכורת</u>:** $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

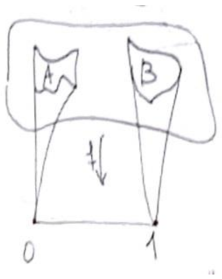
1. $X$ קומפקטי מקומית והאוסדורפי.
2. קיימת קומפקטיפיקציה חד-נקודתית.

רמז: תת קבוצה פתוחה במרחב האוסדורפי קומפקטי (מקומית) מגדיר תת מרחב האוסדורפי קומפקטי מקומית.

**<u>משפט:</u>** $Metriz \subset T_4$.

**<u>הוכחה:</u>** $(X,\tau) \in Metriz \Rightarrow \exists d: \tau = top(d)$

<u>מ"ל:</u>




א. $X \in T_1$.

ב. לכל $A, B$ סגורות יש הפרדה פונקציונלית (הפרדה פונקציונלית גוררת הפרדה סביבתית)

א) ברור $Metriz \subset T_2$.

ב)נגדיר $f: X \to [0,1]$ ע"י: $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)}$

כאשר – $f_A(x) = d(x,A)\,, f_B(x) = d(x,B)$

- $0 \le f(x) \le 1$
- מוגדר היטב: המכנה $\neq 0$ לכל $x$ כי – $f_A(x) \ge 0, f_B(x) \ge 0$
  לכן המכנה $= 0$ אם ורק אם –

$$\begin{cases} f_A(x) = 0 \\ f_B(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} d(x,A) = 0 \\ d(x,B) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \in \bar{A} \overbrace{=}^{\text{נתון סגור}} A \\ x \in \bar{B} \underbrace{=}_{\text{נתון סגור}} B \end{cases}$$

לכן $x \in A \cap B$. מצד שני, $A \cap B = \emptyset$ (נתון). סתירה!

- נשים לב כי –

$$\frac{f_1}{f_2} = f \in C(X,[0,1])$$

$f$ רציפה. זה קורה כי $f_1, f_2 \in C(X)$ וכן $f_2 \neq 0$ תמיד.

- $\forall a \in A: \quad f(a) = \frac{0}{-} = 0$.
- $\forall b \in B: \quad \frac{d(b,A)}{d(b,A)+0} = f(b) = 1$.

מצאנו הפרדה פונקציונלית!

☺

מידע: קיימים $X \in T_{3\frac{1}{2}}/T_4$, למשל $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$.

Urysohn's Small Lemma (USL)

נניח $X \in T_4$ אז

(*) **לכל סביבה פתוחה $O$ של קבוצה סגורה $A$ קיימת סביבה פתוחה $U$ של $A$ כך ש $A \subset U \subset \overline{U} \subset O$.**

<u>הסבר</u>: $X \in T_4$ לכן עבור קבוצות סגורות זרות $A, B := X \setminus O$ קיימות סביבות פתוחות זרות $U \in N(A) \cap \tau, \mathrm{V} \in N(B) \cap \tau$

אז נקבל $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus \mathrm{V} \subset X \setminus B = O$.

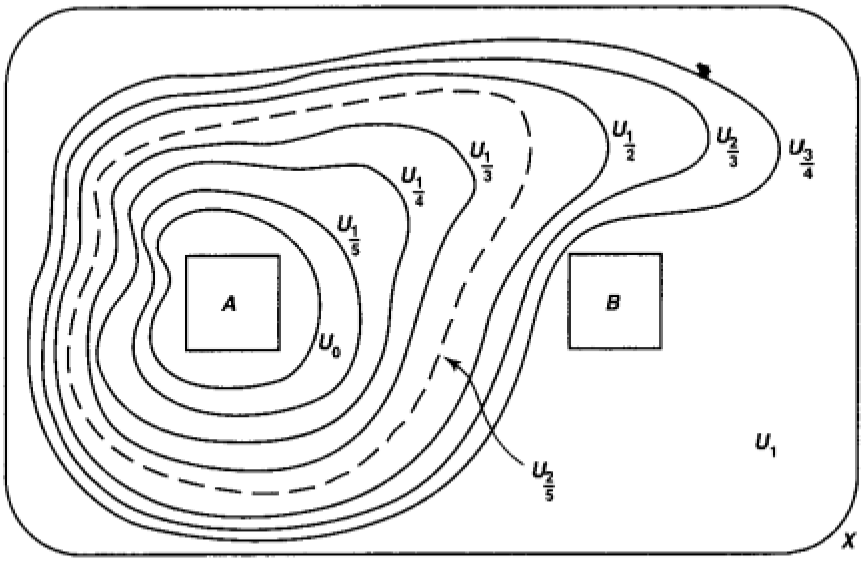
הערה: בעצם (*) שקול לתנאי ב של אקסיומת $T_4$

**<u>משפט (למה של Urysohn)</u>:** $T_4 = T_4^{func}$.

נניח $X \in T_4$. אז לכל קבוצות סגורות זרות $A, B$ יש הפרדה פונקציונלית במובן Urysohn (פונקציה רציפה $f : X \to [0,1] \quad \mathrm{f(A)=0, f(B)=1}$)

<u>הוכחה</u>: רעיון להוכחה – "Onion Argument"

בהנחה שיש פונקציה כזאת אז יש אוסף $\{U_t : \mathrm{t} \in [0,1]\}$ סביבות פתוחות של $A$ כך ש $0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$ (ניקח למשל: $U_t := f^{-1}[0,t)$. שימו לב: $\overline{[0,\mathrm{s})} \subseteq [0,t)$)




בהוכחה הבאה עוברים תהליך הפוך – מבניית מאוסף דומה לבניית פונקציה.

תחילת התהליך: נגדיר $U_1 = X$ . בגלל (USL) עבור $A \subset B^c$ קיימת קבוצה פתוחה $U_{\frac{1}{2}}$

כך ש $$A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset X \setminus B$$

שוב בגלל (USL) קיימות קבוצות פתוחות $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}}$ כך ש

$$A \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset X \setminus B$$

בשלב הבא נמצא סביבות פתוחות עם אינדקסים $\frac{1}{8}, \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8} = 1$

כאשר סביבות עם האינדקסים $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{8}{8} = 1$ כבר הגדרנו !

נמשיך כך באינדוקציה. אז נקבל אוסף קבוצות פתוחות

$$\{U_t : t \in D\} \quad 0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$$

שימו לב קבוצת רציונליים דיאדיים $\mathrm{D} := \{\frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbb{N}, m \le 2^n\}$ **__צפופה__** ב $[0,1]$.

נגדיר פונקציה $$f(x) := \inf\{t \in D : x \in U_t\}$$

- $0 \le f(x) \le 1 \quad f(\mathrm{a}) = 0 \; \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A} \quad \mathrm{f(b)} = 1 \; \forall b \in B$

  כי $0 \in \overline{D} = [0,1] \quad \forall t \in D \;\; A \subseteq U_t \subseteq X \setminus B \subseteq X = U_1$.
- $f : X \to [0,1]$ רציפה (**__נדלג על הבדיקה__**)

  לפי תכונת פרא-בסיס (ב $[0,1]$) מ"ל $f^{-1}[0,a), \;\; f^{-1}(a,1]$ פתוחות ב $X$.

  א. לפי ההגדרה $f^{-1}[0,a) = \{x \in X : f(x) < a\}$.

קבוצה $D$ צפופה ב $[0,1]$. לכן נקבל ש $f^{-1}[0,a)=\bigcup_{t<a}U_t$ והיא פתוחה לפי $(t_3)$.

ב. ש"ל $X\setminus f^{-1}(a,1]$ סגור.

קודם נעיר $X\setminus f^{-1}(a,1]=\{x\in X:f(x)\le a\}$.

עכשיו מ"ל $\{x\in X:f(x)\le a\}=\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$ (ואז חיתוך קבוצות סגורות שימוש ב $(t_3{}^c)$)

$(\subseteq)$

נניח $y\in\{x\in X:f(x)\le a\}$. נבחר דיאדי $s\in D$ כך ש $a<s<1$ (צפיפות $D$!)

אז לכל $a<t<s$ נקבל $\overline{U_t}\subseteq U_s$.

מצד שני בגלל $f(y)\le a<t$ מתקיים $y\in U_t\subseteq\overline{U_t}$. לכן $y\in\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$.

$(\supseteq)$

נניח $y\in\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$. נבחר $\varepsilon$ כך ש $0<\varepsilon<1-a$.

בגלל הצפיפות של $D$ נבחר:

$t\in D$ כך ש $a<t<a+\varepsilon<1$

וגם $s\in D$ כך ש $t<s<a+\varepsilon$.

ברור שאז $\overline{U_t}\subseteq U_s$. לכן $y\in U_s$. מכאן $f(y)\le s<a+\varepsilon$.

קיבלנו $f(y)<a+\varepsilon\quad\forall 0<\varepsilon<1-a$.

ז"א $f(y)\le a$.

☺

**ראו גם:** https://en.wikipedia.org/wiki/Urysohn%27s_lemma

__**הערה:**__ (Tietze-Urysohn extension thm)

נניח $X\in T_1$. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $X\in T_4$.
2. לכל תת קבוצה סגורה $A\subset X$ ולכל פונקציה רציפה $f:A\to[0,1]$ קיימת הרחבה רציפה $F:X\to[0,1]$.

__נוכיח__ רק $(1)\to(2)$:

נניח $C,B$ קבוצות סגורות זרות לא ריקות. נגדיר קבוצה $A:=C\cup B$. אז היא סגורה. ונגדיר פונקציה $f(A)=0,f(B)=1\quad f:A\to[0,1]$. אז היא רציפה

(שימו לב: $A:=C\cup B$ פירוק טופולוגי).

לפי (2) קיימת הרחבה רציפה $F:X\to[0,1]$.

אז לפי הבנייה היא מפרידה פונקציונלית $C,B$.

**<u>תרגיל:</u>** * (Square-filling curves)

בעזרת משפט ההרחבה הוכיחו שקיימת פונקציה רציפה <u>על</u> $F:[0,1]\to[0,1]^2$.

<u>הסבר:</u>

קיים הומיאומורפיזם $h:C\to C^2$ וקיימת פונקציה רציפה ועל $\varphi:C\to[0,1]$

אז יש גם פונקציה רציפה ועל $f=(\varphi\times\varphi)\circ h:C\to[0,1]\times[0,1]$.

כעת נשתמש במשפט ההרחבה ונקבל פונקציה רציפה ועל $F:[0,1]\to[0,1]^2$.

☺

**<u>הגדרה</u>**: נניח $S=\{f_i:X\to Y_i\}_{i\in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש S :

א. <u>מפריד נקודות</u> אם לכל $x_1\neq x_2$ ב $X$ קיים $f_{i_0}:X\to Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x_1)\neq f_{i_0}(x_2)$

ב. <u>מפריד נקודות וקבוצות סגורות</u> אם לכל $x\in X$ וקבוצה סגורה $x\notin C$ ב $X$

קיים $f_{i_0}:X\to Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x)\neq\overline{f_{i_0}(C)}$.

**<u>משפט</u>** (על פונקצית האלכסון):

1. נניח $S=\{f_i:X\to Y_i\}_{i\in I}$ אוסף של פונקציות רציפות ונתבונן בפונקצית האלכסון

$f(x)=(f_i(x))_{i\in I}\quad f=\Delta_{i\in I}f_i:X\to Y=(\prod_{i\in I}Y_i,\tau_\Pi)$.

א. אם S מפריד נקודות אז $f$ רציפה חח"ע.

ב. אם S מפריד נקודות וקבוצות סגורות, $X\in T_1$ אז $f$ שיכון טופולוגי.

<u>הוכחה:</u> א. לפי **משפט על האלכסון** $f$ רציפה ומתקיים $f_i=p_i\circ f\quad \forall i\in I$.

לכן אם $f_{i_0}(x_1)\neq f_{i_0}(x_2)$ אז $f(x_1)=(f_i(x_1))_{i\in I}\neq f(x_2)=(f_i(x_2))_{i\in I}$.

ב. $X \in T_1$ לכן לפי שלב (א) האוסף S מפריד נקודות ופונקצית אלכסון היא חח"ע.

מ"ל שפונקציה (חח"ע+על+רציפה) "מצומצמת בטווח" $f: X \to f(X)$ סגורה.

מ"ל $f(C) = f(X) \cap \overline{f(C)}$ לכל $C$ סגור ב $X$.

מ"ל $f(C) \supseteq f(X) \cap \overline{f(C)}$ (הכלה $\subseteq$ ברורה).

נניח $y \in f(X) \cap \overline{f(C)}$. צ"ל $y \in f(C)$.

נקבל $y = f(x) \in \overline{f(C)}$ $\exists x \in X$.

אז בגלל השוויונים $f_i = p_i \circ f$ $\forall i \in I$ רציפות ההטלות נקבל

$$\forall i \in I \quad f_i(x) = \mathrm{p}_i(f(x)) \in \mathrm{p}_i\, \overline{f(C)} \subset \overline{\mathrm{p}_i\, f(C)} = \overline{f_i(C)}$$

זאת אומרת S לא מפריד נקודה $x$ וקבוצה סגורה $C$. אז בהכרח $x \in C$.

זה מוכיח $y = f(x) \in f(C)$.

☺